Nachtrag zum 12.6. 190609

Wir hatten für $u \in C^2(\bar{D})$ mit $D \subset \mathbb{R}^3$ offen beschränkt die Darstellung

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\left\{ \int_{\partial D} \frac{1}{|y-x|}\,\partial_\nu u(y) - u(y)\,\partial_\nu \frac{1}{|y-x|}\, d\sigma(y) - \int_D \frac{1}{|y-x|}\,\Delta u(y)\, dy \right\}$$

$\phi(x) := \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|}$ heißt Fundamentallösung der Laplacegleichung (für $x \neq 0$). D.h. $\phi(y-x) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|y-x|}$

Green'sche Funktion ϕ^x löst

$$\Delta \phi^x(y) = 0 \text{ in } D, \quad \phi^x(y) = \phi(y-x) \quad y \in \partial D$$

Dann heißt $G(x,y) := \phi(y-x) - \phi^x(y)$ Green'sche Funktion zu D

(1) Ziel: Lösungsdarstellung von u aus Poissonproblem mit Dirichlet Daten,

$$-\Delta u = f \text{ in } D$$
$$u = g \text{ auf } \partial D$$

Sei $u \in C^2(\bar{D})$ Lösung. Dann gilt für alle $x \in D$:

$$u(x) = -\int_{\partial D} g(y)\,\partial_\nu G(x,y)\, d\sigma(y) + \int_D f(y)\, G(x,y)\, dy$$

Nachweis und weiteres Studium $\rightarrow$ Skript Struckmeier, Evans: PDEs

190609

Schwache Formulierung

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma_1 \qquad \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega \\ \underbrace{\partial_\nu u + \alpha u = r}_{\text{Robin RB}} &\quad \text{auf } \Gamma_2 \qquad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset \end{aligned}\right\} (*)$$

Schwache bzw variationelle Form von (*) lautet

Finde u mit $u = g$ auf Γ_1 und

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_2} \alpha u v \, d\sigma = \int_\Omega f v \, dx + \int_{\Gamma_2} r v \, d\sigma$$

für alle Funktionen $v \in C^1(\overline{\Omega})$,

(2) und $v_{|\Gamma_1} = 0$. Die Funktionen v heißen "Testfunktionen"

Merkregel: Testfunktionen verschwinden dort, wo die gesuchte Funktion festgelegt wird (hier $u = g$ auf Γ_1).

<u>Ziel</u>: Numerische Approx. von u mit Methode der Finiten Elemente

Idee: $b_1, \dots, b_n$ sind geg. Funktionen. Finde Näherung

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i \, b_i(x)$$

an u.

19.01.09

Setze u_h in schwache Form ein und wähle als Testfunktionen $b_1, \dots, b_n$. Dazu

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_2} \alpha u v \, d\sigma$$

Bilinearform in u und v

Schwache Form damit: Finde u mit $u = g$ auf Γ_1 und

$$a(u,v) = \int_\Omega f v \, dx + \int_{\Gamma_2} \tau v \, d\sigma$$

für alle v mit $v = 0$ auf Γ_1

③ "Diskret": Finde $u_1, \dots, u_n$ mit $u_h(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i b_i(x)$

und, $u_h(x) = I_h g(x)$ auf Γ_1

$$a(u_h, v_h) = \int_\Omega f v_h \, dx + \int_{\Gamma_2} \tau v_h \, d\sigma$$

für alle $v_h \in \operatorname{span}\{b_1, \dots, b_n\}$.

Dabei $(I_h g)(x) := \sum_{i=1}^{n} g_i b_i(x)$ mit g_i geeignet.

Seien $b_1, \dots, b_n$ linear unabh.

Dann fordern

$$a(u_h, b_j) = \int_\Omega f b_j \, dx + \int_{\Gamma_2} \tau b_j \, d\sigma \quad j = 1, \dots, n$$

Schreibe 19.06.09

$$a(u_h, b_j) = a\left(\sum_{i=1}^{n} u_i b_i, b_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i\, a(b_i, b_j) = A\, U$$

mit $U = (u_1, \dots, u_n)^t$ und

$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$,

$$a_{ij} := a(b_j, b_i)$$

Setze noch

$R = (R_j)_{j=1}^{n}$, $R_j := \int_{\Omega} f b_j\, dx + \int_{\Gamma_2} \tau b_j\, d\sigma$

Damit erhalten wir die "diskrete"

④ Aufgabe: Finde $U \in \mathbb{R}^n$ mit

$A U = R$ Lineares GLS

Eigenschaften von A

i) $a(b_i, b_j) = a(b_j, b_i) \quad \forall i,j$

$\Rightarrow$ A symmetrisch

ii) A ist positiv definit,

d.h. $U^t A U > 0 \quad \forall U \neq 0$, $U \in \mathbb{R}^n$,

denn zu $U = (u_1, \dots, u_n)^t$ definiere

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i b_i(x)$$

Ferner

190609

$$u^t A u = \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla u_h \, dx + \int_{\Gamma_2} \alpha \, u_h u_h \, d\sigma$$

$$= a(u_h, u_h)$$

$$= \underbrace{\int_\Omega |\nabla u_h|^2 dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{\Gamma_2} \alpha |u_h|^2 d\sigma}_{\geq 0 \ (\alpha > 0)}$$

$= 0: \Rightarrow \nabla u_h \equiv \overset{0}{\cancel{\text{const}}}$

$\Rightarrow u_h \equiv \text{const}$

$\int_{\Gamma_2} \alpha |\text{const}|^2 d\sigma = 0$

$\Rightarrow \text{const} = 0.$

5 Also $u^t A u > 0 \ \forall u \neq 0$

d.h. A spd und damit regulär ($\hat{=}$ invertierbar).

Zentral aus praktischer Sicht: Konstruktion von

$$V_h = \text{span}\{b_1, \dots, b_n\},$$

also Konstruktion der b_i!

Konstruktionsprinzip in 1-D:

$\Omega = [0,1)$, $0 = x_0 < \dots < x_{n+1} = 1$ Unterteilung, $h = \max_{1 \leq i \leq n} |x_{i+1} - x_i|$