

26.09

Konstruktion des Riemann-Integrals

$d=1$ (Riemandimension)

$\bar{\Omega} = [0, 1]$, $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$

Unterteilung, z.Bsp. $x_i = i/n$,

$h = \frac{1}{n}$ Schrittweite

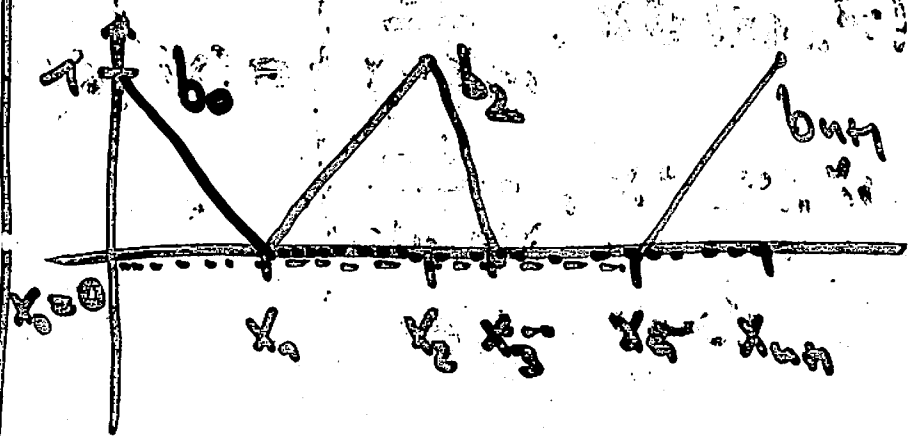
$$b_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist $\sum_{i=1}^n b_i(x) = 1$

$$b_0(x) = \begin{cases} \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} & x \in [x_0, x_1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

①

$$b_{i+1}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Aufgabe: $u^0 = f$ in Ω , $u(0) = g$

und $u'(a) + \alpha u(a) = r$

Schwache Form aufgabe Finde u mit $u(0) = g$ und

$$\int_0^1 u' v' dx + \alpha u(a) v(a) = (f, v) = \int_0^1 f v dx + r v(a) \quad \forall v, v(a) = 0$$

260603!

Diskont: Finde $u_i \in \text{span}\{b_1, \dots, b_n\}$
mit $u_i(0) = g$ und $u_i(x) = 0$ für $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$u_i' u_i' dx + \alpha u_i(0) u_i'(0) = 0 \quad \forall u_i \in V_i$$

$$= \int_0^1 f u_i dx + \alpha u_i(0) u_i'(0) \quad \forall u_i \in V_i$$

mit $V_i := \text{span}\{b_1, \dots, b_n\}$

Differenzierbarkeit hier im schwachen

Sinn zu verstehen, d.h.

$$\int_0^1 x s' = - \int_0^1 x s \quad \forall s \in C_0^\infty(0,1)$$

mit Träger(s) $\subset (0,1)$ kompakt

②

Dann heißt x schwache Ableitung
von f . Damit gilt

$$b_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{x - x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i) \\ \frac{-1}{x_i - x} & x \in (x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$u_i(x) = \sum_{j=0}^n u_j b_j(x) \quad \text{mit } u_i(0) = g$$

$$u_i(0) = g \quad \text{mit } u_0 := g$$

$$u_i(x) = g b_0(x) + \sum_{j=1}^n u_j b_j(x)$$

Grenzen in ② liest

260609

$$\int b_0 v_0 dx + \sum_{j=1}^n \int b_j v_j dx$$

mit $v_0(x)$

$$= \int (1 + v_0 dx + v_0(x))$$

Setze $v_j = b_j$ für $j = 1, \dots, n+1$:

$$\sum_{j=1}^n \int b_j b_j dx + x \cdot \text{const.}$$

$$= \int b_0 b_0 dx + \int (1 + b_0) dx + \text{const.}$$

mit $b_0(x) = (1 + v_0(x))$ ergibt sich

$$A u = R \quad \text{wobei}$$

②. $A = (a_{ij})$ mit $R = (R_j)$ mit $j = 1, \dots, n$

$$a_{ij} = \int b_i b_j dx$$

und $a_{ij} = \int b_i b_j dx + \text{const.}$

und $a_{ij} = \int b_i b_j dx + \int b_i dx + \text{const.}$

Beachte: $a_{ij} = a_{ji}$ ist symmetrisch

dh. A ist symmetrisch

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

mit A sym. und $m.s.$ definit

260603
 Sei gelet Verteilung δ gegeben,
 d.h. $x_{i+1} - x_i = h$ in $0, \dots, 4$

Dann erhalten wir

$$a_{ii} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (b_i)^2 dx = 2h \frac{1}{4} = \frac{2}{h}$$

$$a_{i,i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} b_i b_{i+1} dx = -\frac{1}{h}$$

$$= a_{i+1,i}$$

und $a_{nn} = \frac{1}{h} + \alpha$, also

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 + \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

④ h ist
 $\kappa_2(A) \stackrel{\text{Asym}}{=} \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} = O(h^{-2})$
 pro def.

Lösungsmethoden

i) Direkte Verfahren (Matlab /)

ii) Iterative Verfahren, Kohnen & Kohnen
 basiert

→ CG Verfahren - Klasse
 Conjugate Gradient Methods

→ Vorkonditionierung
 und Hestenes Methoden