030709

Aufgabe

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega$$
$$u = g \text{ auf } \Gamma_1$$
$$\partial_\nu u + \alpha u = r \text{ auf } \Gamma_2$$

hat schwache Form „Finde u mit $u = g$ auf Γ_1 und

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_2} \alpha u v \, d\sigma$$

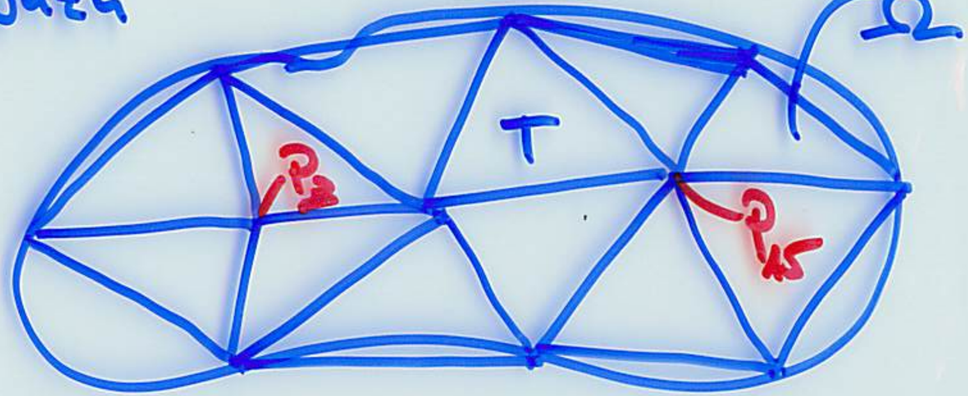
$$= \int_\Omega f v \, dx + \int_{\Gamma_2} \alpha r v \, d\sigma \quad \forall v,\ v_{|\Gamma_1} = 0$$

In einer Raumdimension numer. Behandlung abgeschlossen!

(1) Numerischer Zugang für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$, exemplarisch $n = 2$

Konstruktion des Finite-Element Raumes $V_h = \operatorname{span}\{b_1, \dots, b_n\}$

Dazu



Zerlege Ω in Simplexe oder Quader und erhalte

$$\Omega_h = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T \quad \text{mit } h := \max_{T \in \mathcal{T}_h} \operatorname{diam}(T)$$

030709

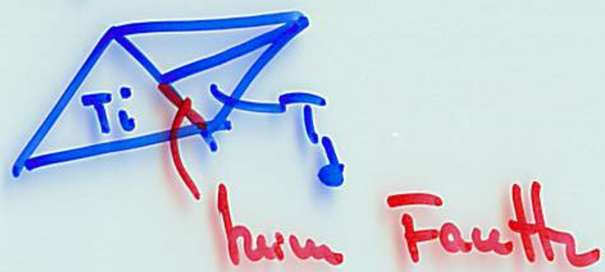
Achtung: Bei krummberandeten Bereichen Ω ist Ω_h nur eine Approximation an Ω, deren Güte über die Gitterweite h gesteuert wird

Verlange, dass Zerlegung $\mathcal{T}_h$ regulär ist in dem Sinn, dass mit $T_i, T_j \in \mathcal{T}_h$

$$\overline{T}_i \cap \overline{T}_j = \emptyset \quad \text{oder Facette}$$

von T_i und von T_j.

② Ausgeschlossen:



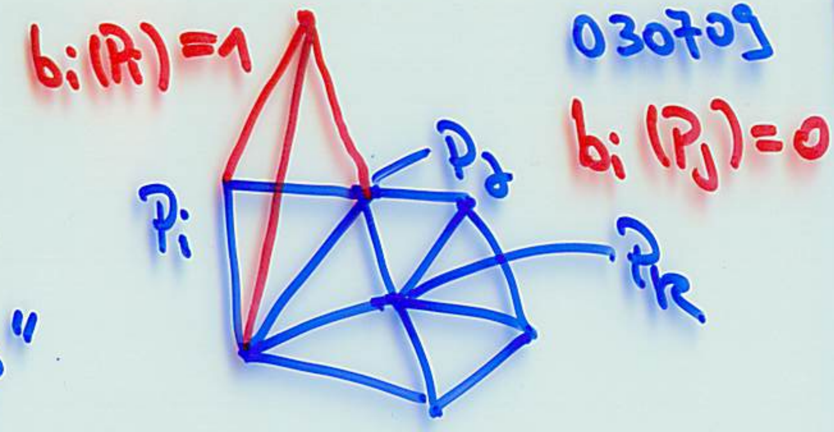
ii) Konstruktion der Basisfunktionen

Dazu seien P_i $(i=1,\dots,n)$ Facetten 0-ter Ordnung (Eckpunkte der in $\mathcal{T}_h$ enthaltenen Simplexe. Definiere $b_i \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}_h)$ durch

$$b_i(P_j) = \delta_{ij} \quad \text{und}$$

$$b_i|_T \ \text{linear} \quad \forall_{T \in \mathcal{T}_h}$$

030709



"Tipis"

$V_h = \text{span}\{b_1, \dots, b_n\}$

$W_h := \{ v_h \in V_h ;\ P_i \in \Omega \cup \Gamma_2 \}$

$\rightarrow \quad v_h|_{\Gamma_1} = 0 \quad \forall v_h \in W_h$!

Beachte: b_i sind schwach differenzierbar $\rightarrow$ nachsehen

Ansatz

$$u_h(x) = \sum_{b_i \in W_h} u_i b_i(x) + \sum_{P_i \in \Gamma_1} g(P_i)\, b_i(x)$$

③ in schwache Form der DGL einsetzen ergibt wie in 1-d:

$$a(u_h, v_h) = \sum_{P_i \in \Omega \cup \Gamma_2} u_i\, a(b_i, b_j) + \sum_{P_i \in \Gamma_1} g(P_i)\, a(b_i, b_j)$$

falls $v_h = b_j \in W_h$.

Es ergibt sich das GLS

$$A u = R \qquad (*)$$

mit $a_{ij} = a(b_j, b_i)$

$$R_j = \int_\Omega f b_j \, dx + \int_{\Gamma_2} \alpha r b_j \, d\sigma - \sum_{P_i \in \Gamma_1} g(P_i)\, a(b_i, b_j)$$

der Struktur von $\mathbb{A}$

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla b_j \nabla b_i \, dx + \int_{\Gamma_2} \alpha \, b_j b_i \, d\sigma$$

Besetzungsstruktur abhängig von Nummerierung der P_i. Aber:

Nicht-Null Elemente in jeder Zeile (etwa Zeile i) stimmt mit Anzahl der Nachbarn des assoziierten Knotens (hier P_i) überein. (Dünnbesetztheit!)

Kein Bandstruktur 2 →

kein Eliminationsverfahren zur numerischen Lösung des GLS

$$\mathbb{A}U = R.$$

↳ Iterative Verfahren auf der Basis von Matrix × Vektor Operationen.

03.07.09

Wärmeleitungsgleichung

i.) Anfangs - Randwertaufgabe

Finde $u(x,t)$ mit

$$(P)\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - a^2 \Delta_x u(x,t) = f(x,t) & \text{für } x \in \Omega,\ t \in (0,T] \\ \text{RB} \quad u(x,t) = g(x,t) & \text{für } x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T] \\ \text{AW} \quad u(x,0) = \varphi(x) & \text{für } x \in \Omega \end{cases}$$

mit f, g, φ vorgelegt.

ii) Cauchy Problem im $\mathbb{R}^n$

Finde $u(x,t)$ mit

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - \Delta_x u(x,t) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0,T]$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n$$

Zu i.) OE $g(x,t) \equiv 0$

Zunächst Raumdimension $n=1$

Definiere mit $\Omega := (0,\ell)$

$$(P_1)\quad \tilde{u}_t - a^2 \tilde{u}_{xx} = f \text{ in } \Omega \times (0,T]$$

$$\tilde{u}(0,t) = \tilde{u}(\ell,t) = 0 \quad t \in (0,T]$$

$$\tilde{u}(x,0) = 0\ ,\ x \in \Omega.$$

030709

(P_2) $v_t - a^2 v_{xx} = 0$ in $\Omega \times (0,T]$

$v(0,t) = v(\ell,t) = 0 \quad t \in (0,T]$

$v(x,0) = \varphi(x), \; x \in \Omega$

Dann löst $u := \tilde{u} + v$ das Problem (P)!

Zur Lösung von (P_2) setze an

$$v(x,t) = X(x)\,T(t)$$

in DGL liefert

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(\ell) = 0$$

$$\Rightarrow X(x) = X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right), \; n \in \mathbb{N}$$

(b) und

$$\dot{T} + \lambda a^2 T = 0$$

$$\Rightarrow T(t) = T_n(t) = d_n \, e^{-a^2 \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}$$

Superposition liefert

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

mit c_n aus

$$v(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

φ 2ℓ-periodisch ungerade fortsetzen:

$$c_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(t) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} t\right) dt$$

✓