100709

Anfangs-Randwertaufgabe für die Wärmeleitung

$$(P)\quad \begin{aligned} u_t - a^2 u_{xx} &= f \quad \text{in } \underbrace{\Omega}_{(0,\ell)} \times (0,T] \\ u(0,t) &= u(\ell,t) = 0 \quad \forall_t \\ u(x,0) &= \varphi(x) \quad \forall_x \end{aligned}$$

$$(P1)\quad \begin{aligned} \tilde{u}_t - a^2 \tilde{u}_{xx} &= f \\ \tilde{u}(0,t) &= \tilde{u}(\ell,t) = 0 \\ \tilde{u}(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

$$(P2)\quad \begin{aligned} v_t - a^2 v_{xx} &= 0 \\ v(0,t) &= v(\ell,t) = 0 \\ v(x,0) &= \varphi(x) \end{aligned}$$

① Dann $u := v + \tilde{u}$ Lösung von (P).

Lösung für (P2) ist

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

mit

$$c_n := \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \varphi(t) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} t\right) dt$$

zu (P_1): Ansatz für $\tilde{u}(x,t)$ sei

$$\tilde{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

$$\Rightarrow \tilde{u}(0,t) = \tilde{u}(\ell,t) = 0$$

100709

Sei f hinreichend glatt. Dann

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

mit $f_n(t) := \frac{2}{l} \int_0^l f(s,t) \sin\left(\frac{n\pi}{l} s\right) ds$

<u>Beachte</u>: f soll kompatibel sein mit RBen. Setze f $2l$-periodisch ungerade fort.

Einsetzen der Entwicklungen in DGL:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n'(t) + a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 A_n(t) - f_n(t) \right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \overset{!}{=} 0$$

② Das ergibt

$$A_n'(t) + a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 A_n(t) = f_n(t) \quad \text{in } (0,T]$$

und $A_n(0) = 0$ ($\Rightarrow$ AB erfüllt)

Lösung

$$A_n(t) = \int_0^t e^{-a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau$$

und damit

$$\bar{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau \right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right),$$

also

$$u = v + \bar{u} = \ldots.$$

Lösung von (P).

100709

zur Sicherstellung der Konvergenz: $\varphi \in C^3([0,\ell])$, $f(\cdot,t)$ analog.

Bsp: $u_t - u_{xx} = 0$ in $(0,\pi)\times(0,T]$

$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \forall t$

$u(x,0) = \sin x$

Hier $a = 1$, $f \equiv 0$, $\varphi(x) = \sin x$

Lösung $u = \tilde{u} + v$ mit $\tilde{u} \equiv 0$, weil $f = 0$

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \sin(nx)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad c_n = 0 \quad n \neq 1$$

③ Lösung somit

$$u(x,t) = e^{-t}\sin x$$

Bemerkung: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^n$) kreis- bzw kugelförmig. Dann Vorgehen mit Übergang zu Polarkoordinaten analog zur Bh. der Wellengleichung.

zum Cauchy Problem im $\mathbb{R}^n$

$u_t - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times \{t > 0\}$

$u(x,0) = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$

hier Lösungskonstruktion für $n = 1$ angelehnt an Skript Struckmeier.

$n=1$: Lösungsansatz 100709

$$u(x,t) = t^{-1/2}\, v(t^{-1/2} x)$$

mit zu bestimmendem v

Einsetzen in DGL ergibt wegen

$$u_t = -\frac{1}{2} t^{-3/2} v - \frac{1}{2} t^{-3/2} x\, t^{-1/2} v'$$

und

$$u_{xx} = t^{-3/2} v''$$

$$u_t - u_{xx} =$$
$$= -\frac{1}{2} t^{-3/2} v - \frac{1}{2} x\, t^{-2} v' - t^{-3/2} v'' = 0$$

d.h. $$v'' + \frac{1}{2} \frac{x}{t^{1/2}} v' + \frac{1}{2} v = 0$$

d.h. $$(v')' + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{t^{1/2}} v\right)' = 0$$

(4) Damit

$$v' + \frac{1}{2} \frac{x}{t^{1/2}} v = c_1 \in \mathbb{R}$$

IA: $\lim_{r\to\infty} v(r) = 0$ und Ableitungsverhalten $\lim_{r\to\infty} v'(r) = 0$ für $r := \frac{x}{t^{1/2}}$

$$\Longrightarrow c_1 = 0.$$

Damit
$$v' = -\frac{1}{2} r v$$

$$\to v(r) = a\, e^{-\frac{r^2}{4}} = a\, e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Es ergibt sich

$$u(x,t) = a\, t^{-1/2}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

mit z.Bsp $a = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$.

100709

Allgemein im $\mathbb{R}^n$

$$\Phi(x,t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & \text{falls } t>0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung. Damit

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, \varphi(y)\, dy$$

ist dann Lösung des Cauchy-Problems. Sonia Kowalewskaja

5 Weiteres Studium

$\hookrightarrow$ Standardwerk Skript

Evans Partial Differential Equations