Department Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2009**
Prof. Dr. M. Hinze, Dr. P. Kiani

Differentialgleichungen II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1

Aufgabe 1:

a) Sei λ eine beliebige fest vorgegebene reelle Zahl. Bestimmen Sie eine reelle Darstellung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$y''(t) - \lambda\, y(t) \;=\; 0\,.$$

b) Sei L eine weitere fest vorgegebene positive reelle Zahl. Bestimmen Sie alle Lösungen der Randwertaufgabe

$$y''(t) - \lambda\, y(t) \;=\; 0 \quad y(0) \;=\; y(L) \;= 0\,.$$

Für wleche $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt die Randwertaufgabe nichttriviale Lösungen?

Aufgabe 2: Bestimmen Sie geeignete reelle Fourierreihen der folgenden Funktionen:

a) Ungerade $2L-$ periodische Fortsetzung von
$f\,:\,[0,1[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(4\pi x) + 2\sin(6\pi x) \quad L = 1\,,$

b) Gerade $2L-$ periodische Fortsetzung von
$f:[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}[\to \mathbb{R}, \quad L = \pi$ mit

$$f(t) \;=\; \begin{cases} 2, & -\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \frac{\pi}{4} < t < \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Randwertaufgabe

$$x^2y'' - xy' + (1+\lambda^2)y = 0 \qquad y(1) = 0 \qquad y(e) = 0 \quad .$$

Hinweis: Bestimmen Sie die Randwertaufgabe, die sich für $u(t) := y(e^t)$ aus der ursprünglich gegebenen Aufgabe ergibt, und diskutieren Sie das Eigenwertproblem bei der dadurch entstandenen Gleichung für u. Übertragen Sie anschließend die Ergebnisse zurück.

Aufgabe 4: Ein einfaches Verkehrsflussmodell:

Wir betrachten einen eindimensionalen Fluß von Fahrzeugen entlang einer unendlich langen, einspurigen Fahrbahn. In einem sogenannten makroskopischen Modell betrachtet man nicht einzelne Fahrzeuge, sondern den Gesamtfluß. Dazu führt man folgende Größen ein :

$u(x,t)$ = Dichte der Fahrzeuge (Fahrzeuge/Längeneinheit) im Punkt x zum Zeitpunkt t,

$v(x,t)$ = Geschwindigkeit im Punkt x zum Zeitpunkt t,

$q(x,t)$ = Fluß = Anzahl Fahrzeuge die x zum Zeitpunkt t pro Zeiteinheit passieren.

a) Nehmen Sie an, dass es keine Ein– bzw. Ausfahrten gibt, dass keine Fahrzeuge verschwinden, und das keine neuen Fahrzeuge hinzukommen. Wie lautet die Erhaltungsgleichung für die Masse (Anzahl Fahrzeuge).

b) Nehmen Sie zusätzlich an, dass die Geschwindigkeit nur von der Dichte abhängt : $v = v(u)$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dq}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

die Erhaltung der Masse beschreibt.

c) Wir nehmen nun in einem ersten einfachen Modell an, dass die Geschwindigkeit umgekehrt proportional zur Dichte wächst und die Dichte positiv ist.

$$v(x,t) = c + \frac{k}{u(x,t)}$$

Wie lautet die Kontinuitätsgleichung (=Erhaltungsgleichung für die Masse)?

d) Lösen Sie die Aufgabe aus Teil c) mit $c = 2$ und $u(x,0) = e^{-x^2}$.

Hinweis: Die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$au_x + bu_y = g(x,y)$$

mit konstanten Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \cdot b \neq 0$ geht durch die Transformieren

$$\nu := bx + ay \, , \; \mu := bx - ay$$

in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\tilde{u}_\nu = \frac{1}{2ab}\tilde{g}(\nu,\mu).$$

über, wobei μ als Parameter aufzufassen ist.

Abgabetermine: 20-23.04.07