Prof. Dr. M. Hinze, Dr. P. Kiani

Differentialgleichungen II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 1:

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} e^x u_t + 4uu_x = 0 & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = e^x & x \geq 0 \end{cases}$$

Hinweis : verwenden Sie die Substitution $y = e^x$.

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei die Aufgabe

$$\begin{cases} u_t + u \cdot u_x = 0 & x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

mit einer differenzierbaren Funktion u_0 . Es gelte

$$u_0'(x_m) \;:=\; \min\{\, u_0'(x) \;:\; x \in \mathbb{R}\,\} \;<\; 0\,.$$

Zeigen Sie, dass die Lösung höchstens für

$$t \in \left[0,\ \frac{-1}{u_0'(x_m)}\right]$$

eindeutig sein kann.

b) Zeichnen Sie die Charakteristiken für die Burgersgleichung $u_t + uu_x = 0$ versehen mit den Anfangswerten

(i)

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \end{cases}$$

(ii)

$$u(x,0) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & 2 < x\,. \end{cases}$$

Welche Probleme ergeben sich?

Aufgabe 3:

Wir untersuchen noch einmal das einfache Verkehrsflussmodell aus Blatt 1 mit den dort eingeführten Bezeichnungen:

$u(x,t)$ = Dichte der Fahrzeuge (Fahrzeuge/Längeneinheit) im Punkt x zum Zeitpunkt t,

$v(x,t)$ = Geschwindigkeit im Punkt x zum Zeitpunkt t,

$q(x,t)$ = Fluß = Anzahl Fahrzeuge die x zum Zeitpunkt pro Zeiteinheit t passieren.

Wir führen zusätzlich ein:

u_{max} = maximale Dichte der Fahrzeuge (Stoßstange an Stoßstange),

v_{max} = maximale Geschwindigkeit

und verwenden den Ansatz: $$v(u(x,t)) = v_{max}\left(1 - \frac{u(x,t)}{u_{max}}\right).$$

a) Stellen Sie die Kontinuitätsgleichung ($u_t + q_x = 0$) auf.

b) Zeigen Sie, dass die Charakteristiken wieder Geraden sind, und bestimmen Sie deren Steigungen.

c) Skizzieren Sie die Charakteristiken für $v_{max} = 1$ und

$$u(x,0) = \begin{cases} u_l = u_{max}/2 & x < 0 \\ u_r = u_{max} & x > 0 \quad \text{(rote Ampel/ Stau etc.)} \end{cases}$$

bzw.

$$u(x,0) = \begin{cases} u_l = u_{max} & x < 0 \\ u_0(x) = u_{max}\,(1 - \frac{x}{2}) & 0 \le x < 1 \\ u_r = u_{max}/2 & 1 \le x\,. \end{cases}$$

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} h(\omega,\tau)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau$$

die inhomogene Anfangswertaufgabe

$\tilde{u}_{tt} - c^2\tilde{u}_{xx} = h(x,t) \qquad \tilde{u}(x,0) = \tilde{u}_t(x,0) = 0\cdot$ löst.

b) Berechnen Sie eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= -4x, & x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,0) &= 1, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= \cos(x), & x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und bestätigen Sie die Lösung durch Einsetzen in die Anfangswertaufgabe. *Hinweis:* Man bestimmt eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit homogenen Anfangswerten, löst die homogene Differentialgleichung mit den inhomogenen Anfangswerten und verwendet das Superpositionsprinzip.

Abgabetermine: 27/28.05.09