Department Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2009**
Prof. Dr. M. Hinze, Dr. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 1:
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_{xt} - 2u_{xx} &= 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= \cos(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= -4\sin(x). \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe der Substitution $\alpha = x + t,\ \mu = x - 2t$.

Hinweis: Vorgehensweise analog zur Herleitung der Lösung des Cauchy-Problems für die Wellengleichung in der Vorlesung.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangsrandwertaufgabe.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx} && 0 < x < 1,\ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= \frac{1}{2}x(1-x) && 0 \le x \le 1\,, \\ u_t(x,0) &= 0 && 0 \le x \le 1\,, \\ u(1,t) &= u(0,t) = 0 && t \ge 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{array}{ll} u_{tt} = u_{xx} & x \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u(x,0) = \sin(x) + x & x \in [0,\pi], \\ u_t(x,0) = 2 - \frac{x}{\pi} & x \in [0,\pi], \\ u(0,t) = t =:\ \phi_1(t) & t > 0, \\ u(\pi,t) = \pi =:\ \phi_2(t) & t > 0. \end{array}$$

Hinweis: Eine Aufgabe diesen Typs kann man z. B. lösen, indem man die Funktion v über

$$v(x,t) = u(x,t) - \phi_1(t) - \frac{x-a}{b-a}\left(\phi_2(t) - \phi_1(t)\right)$$

definiert und in der Aufgabenstellung die u–Ausdrücke durch geeignete

v–Ausdrücke ersetzt. $[a,b]$ sei hierbei das Anfangsintervall, hier also $[0,\pi]$.

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie eine rotationssymmetrische Lösung $u(\boldsymbol{x}, t) = \tilde{u}(r,t)$ der folgenden Anfangswertaufgabe:

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},\ r = \| \boldsymbol{x} \|_2,\ t > 0,$$

$$u(\boldsymbol{x}, 0) = \frac{1}{r+1}, \qquad u_t(\boldsymbol{x}, 0) = 0\,.$$

Hinweis: Nach Vorlesung gilt für rotationssymmetrische Lösungen

$$\tilde{u}_{tt} = \frac{c^2}{r^2}\,(r^2 \tilde{u}_r)_r\,.$$

Zeigen Sie, dass $\hat{u}(r,t) := r\tilde{u}(r,t)$ die Wellengleichung im $\mathbb{R}^1$ löst.
Das heißt, dass $\hat{u}_{tt} = c^2 \hat{u}_{rr}$ gilt.

Setzen Sie die Anfangsdaten für $\hat{u}(r,t)$ ungerade fort und lösen Sie die Anfangswertaufgabe für $\hat{u}(r,t)$. Bestimmen Sie anschließend $u(\boldsymbol{x}, t)$.

Die Fortsetzung der Anfangsdaten ist nicht durch die Vorlesung legitimiert. Testen Sie deshalb die so gefundene Funktion $\tilde{u}$ durch Einsetzen in die zugehörigen Anfangsbedingungen.

Abgabetermine: 17-18.05.09