Department Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2009**
Prof. Dr. M. Hinze,
Dr. P. Kiani

Differentialgleichungen II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5

Aufgabe 1:

a) Sei u eine im Einheitskreis harmonische Funktion mit

$$u(x,y) = y; \qquad \text{für} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Bestimmen Sie den Wert von u im Ursprung.

b) Sei u die Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{array}{rcll} \Delta u & = & -1 & \quad |x| < 1, |y| < 1, \\ u(x,0) & = & 0 & \quad |x| = 1 \text{ oder } |y| = 1. \end{array}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Funktion $v(x,y) = u(x,y) + \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ eine obere und eine untere Schranke für $u(0,0)$.

Aufgabe 2:

Lösen Sie das folgende Dirichletproblem

$$\begin{array}{rcl} \Delta u & = & 0, \qquad x, y \in [0,\pi], \\ u(x,0) & = & 1 - \frac{x}{\pi} + \sin(2x), \\ u(x,\pi) & = & 0, \\ u(0,y) & = & 1 - \frac{y}{\pi} + \sin^3(y), \\ u(\pi,y) & = & 0. \end{array}$$

Hinweis: Führen Sie eine bilineare Funktion $u_E(x,y) := a + bx + cy + dxy$ ein, die die Randwerte in den Ecken $(0,0)$, $(0,\pi)$, (π,π), $(0,\pi)$ interpoliert, und schreiben Sie das Problem um in ein Problem für $v(x,y) = u(x,y) - u_E(x,y)$.

Aufgabe 3:

Sei K der Kreisringsektor $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y > 0,\, 1 < x^2+y^2 < 9\}$ und (r,φ) wie üblich die Polarkoordinatendarstellung von (x,y).

Lösen Sie das Randwertproblem

$$\Delta u = 0 \qquad \text{auf } K$$
$$u = \begin{cases} \varphi\,(\frac{\pi}{2} - \varphi) & r = 3 \\ 0 & \text{auf dem Rest von } \partial K \end{cases}$$

mit Hilfe eines geeigneten Produktansatzes, und berechnen Sie alle Extrema von u auf $\overline{K}$.

Bemerkung: Der Laplace Operator in Polarkoordinaten kann z.B. den Vorlesungsfolien 3-4 vom 15.5. entnommen werden.

$$\Delta u = 0 \iff r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\phi\phi} = 0\,.$$

Aufgabe 4: *(Damit Sie nicht auf die Idee kommen, dass man alles mit einfachen Produktansätzen lösen kann.)*

Am Anfangsort $x = 0$ eines sehr langen Übertragungskabels werde ein Signal der periodischen Spannung

$$U(0,t) = U_0 \cos(\omega t) \qquad t \geq 0$$

eingespeist. Gesucht wird die Signalspannung $U(x,t)$ des Ausgangssignals für $x > 0, t > 0$. Man erhält U als Lösung der sogenannten Telegraphengleichung

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} + (\alpha+\beta) U_t + \alpha\beta U = 0\,.$$

Dabei sind α, β, c konstruktionsbedingte positive Kenngrößen des Problems. Ein zeitlich periodisches Eingangssignal lässt nach einer gewissen Einschwingphase ein zeitlich periodisches Ausgangssignal erwarten. Außerdem fordert man

$$U(x,t) \quad \text{beschränkt für} \quad x \to \infty\,.$$

a) Zeigen Sie, dass der Produktansatz $U(x,t) = w(x) \cdot v(t)$ hier nicht zum Erfolg führt!

b) Versuchen Sie es mit einem Lösungsansatz, der eine örtliche Dämpfung mit einem zeitlich periodischen Verlauf verbindet und eine lineare ortsabhängige Phasenverschiebung zulässt. Wählen Sie exemplarisch $\alpha = \beta = c = 1$.

Abgabetermine: 1./2.07.09