Department Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2009**
Prof. Dr. M. Hinze,
Dr. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 1:

Gegeben ist der 2-dimensionale vertikale Schnitt $R := [0,4] \times [0,2.5]$ eines Zimmers, mit einem Fenster $F := \{(0,y) \,:\, y \in [1,2]\}$ und einer Heizung $H := \{(0,y) \,:\, y \in [0,1]\}$. Wir bezeichnen mit $u(x,y)$ die Temperatur am Ort (x,y). Dann gilt im stationären Zustand $\Delta\, u = 0$.

a) Stellen Sie die Randbedingungen für die Laplace Gleichung unter folgenden Annahmen auf.

- Das Fenster befindet sich auf der konstanten (Außen-)Temperatur $u_A = 12$.
- Die Heizung befindet sich auf der konstanten Temperatur $u_H = 50$.
- Die Decke zum nächsten Geschoß ist so gut isoliert, dass man annehmen kann, dass es keinen Wärmestrom durch die Decke gibt.
- Die Wände und der Boden sind dagegen nicht total isolierend. Der Wärmeverlust durch diese Bauteile wird als proportional zu $u - u_A$ angenommen.

b) Wie lautet die schwache Formulierung des Problems?
Welche Funktionen wählt man als Testfunktionen?

Aufgabe 2:

Die gewöhnliche Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -u'' &= -x, \qquad x \in (0,1), \\ u(0) &= 2, \\ u'(1) &+ 3u(1) = 1 \end{aligned}$$

kann natürlich analytisch gelöst werden (wie?). Hier soll jedoch eine Näherung mit Hilfe der Methode der finiten Elemente berechnet werden. Zerlegen Sie das Intervall dazu in drei Teilintervalle gleicher Länge $h = \frac{1}{3}$ und verwenden Sie die Test- und Basisfunktionen $b_i(x)$ aus der Vorlesung vom 26.06.09.

Aufgabe 3: (Klausur 2005 Oberle/Kiani) Lösen Sie die folgenden Anfangsrandwertprobleme.

a)

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= e^{-t}\sin(2x) && x \in (0,\pi)\,, t \in \mathbb{R}^+, \\ v(x,0) &= \frac{1}{2}\sin(2x) && x \in (0,\pi)\,, \\ v(0,t) &= v(\pi,t) = 0 && t \in \mathbb{R}^+\,. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= e^{-t}\sin(2x) + 1 && x \in (0,\pi)\,, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= \frac{1}{2}\sin(2x) && x \in (0,\pi)\,, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = t && t \in \mathbb{R}^+\,. \end{aligned}$$

Bemerkung : hier kann die gleiche Homogenisierungsmethode verwendet werden, wie in Blatt 4 für die Wellengleichung.

Aufgabe 4:

a) Leiten Sie analog zur Vorgehensweise für das Dirichletproblem in der Vorlesung für das folgende Neumann Problem eine Reihendarstellung der Lösung her.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, && 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) &= g(x), && 0 < x < 1, \\ u_x(0,t) &= u_x(1,t) = 0 && t > 0. \end{aligned}$$

b) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe aus a) mit $g(x) = 1 + \cos(2\pi x)$.

Abgabetermin: 15/16.07.09