Aufgabe 1:

Gegeben ist die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t + (u+1)u_x &= 0 \qquad t \in \mathbb{R}^+,\, x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= x+1 \qquad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe mit Hilfe der Charakteristikenmethode.

b) Sind die Charakteristiken Geraden? Begründen Sie bitte Ihre Antwort.

c) Skizzieren Sie die Charakteristiken durch die Punkte $(x_0, 0)$ mit $x_0 = -2,\, -1,\, 0\,.$

Lösung zu 1:

a) Erweitertes Problem $\quad U_t + (u+1)U_x + 0 \cdot U_u = 0$ ergibt:

$$\frac{dx}{dt} = u+1, \qquad \frac{du}{dt} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

$$\begin{aligned} u &= C, \qquad \textbf{[1 Punkt]} \\ dx &= (C+1)dt \\ \Longrightarrow x(t) &= Ct + t + D \\ \Longrightarrow D &= x - (u+1)t\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]} \\ D &= f(C) \Longrightarrow x - (u+1)t = f(u) \end{aligned}$$

Anfangswerte liefern :

$$x = f(x+1) \Longrightarrow f(y) = y - 1 \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

$$x-(u+1)t = f(u) = u-1 \Longrightarrow x-t+1 = u(1+t) \Longrightarrow u(x,t) = \frac{x+1-t}{1+t}\,.$$

[1 Punkt]

b) Auf den Charakteristiken gilt

$\dfrac{du}{dt} = 0 \qquad \Longrightarrow u$ ist also konstant. Außerdem gilt

$\dfrac{dx}{dt} = u+1 \qquad \Longrightarrow$ also ist $\dfrac{dx}{dt}$ konsant entlang der Charakteristik. D.h. die Steigung der Charakteristiken ist konstant. Es handelt sich um Geraden. **[1 Punkt]**

c) Die Charakteristiken durch die Punkte $(x_0, 0)$ mit $x_0 = -2, -1, 0$ sind Geraden mit den Steigungen $(\,dx/dt\,)$ 0, 1 und 2.

SKIZZE: **[2 Punkte]**

Aufgabe 2:

Lösen Sie die folgenden Anfangsrandwertprobleme.

a)
$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= 2\sin(\pi x) && x \in (0,2)\,, t \in \mathbb{R}^+, \\ v(x,0) &= \sin(\pi x) + 2\sin(2\pi x) && x \in [0,2]\,, \\ v(0,t) &= v(2,t) = 0 && t \in \mathbb{R}^+\,. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 2\sin(\pi x) && x \in (0,2)\,, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= \sin(\pi x) + 2\sin(2\pi x) + x && x \in [0,2]\,, \\ u(0,t) &= 0\,, \quad u(2,t) = 2 && t \in \mathbb{R}^+\,. \end{aligned}$$

Hinweis : Beachten Sie Teil a) der Aufgabe.

Lösung zu 2:

a) Wir zerlegen die Aufgabe in zwei Teile:

Die homogene Dgl. mit den vorgegebenen Anfangs– und Randdaten

$$\begin{aligned} v_t^* - v_{xx}^* &= 0 && x \in (0,2)\,, t \in \mathbb{R}^+, \\ v^*(x,0) &= \sin(\pi x) + 2\sin(2\pi x) && x \in [0,2]\,, \\ v^*(0,t) &= v^*(2,t) = 0 && t \in \mathbb{R}^+\,. \end{aligned}$$

und die inhomogene Dgl. mit homogenen Anfangs– und Randdaten

$$\begin{aligned} v_t^{**} - v_{xx}^{**} &= 2\sin(\pi x) && x \in (0,2)\,, t \in \mathbb{R}^+, \\ v^{**}(x,0) &= 0 && x \in (0,2)\,, \\ v^{**}(0,t) &= v^{**}(2,t) = 0 && t \in \mathbb{R}^+\,. \end{aligned}$$

Mit $\omega = \frac{\pi}{2}$ und $c = 1$ lautet die Lösung des ersten Problems

$$v^*(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e^{-k^2\omega^2 t} \sin(k\omega x) \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

wobei die $a_k = \frac{2}{2}\int_0^2 (\sin(\pi x) + 2\sin(2\pi x))\sin(\frac{k\pi}{2}x)dx$

die Fourierkoeffizienten von $\sin(\pi x) + 2\sin(2\pi x)$ sind. Es gilt also

$a_2 = 1$ und $a_4 = 2$ und $a_k = 0$ sonst **[1 Punkt]**

und damit

$v^*(x,t) = e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x) + 2\,e^{-4\pi^2 t}\sin(2\pi x)\,.$ **[1 Punkt]**

Für v^{**} machen wir den Ansatz:

$$v^{**} = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\sin(\frac{k\pi}{2}x)\,, \qquad v_k(0) = 0$$

Einsetzen in die Dgl ergibt:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\dot v_k(t) + \frac{k^2\pi^2}{4}v_k(t)\right]\sin(\frac{k\pi}{2}x) \;=\; 2\sin(\pi x)$$

Damit erhalten wir $v_k(t) \equiv 0$ für $k \neq 2$ und die gewöhnliche Dgl

$$\dot v_2(t) + \pi^2 v_2(t) \;=\; 2 \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

für v_2. Die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung lautet

$$v_{2,h}(t) = Ce^{-\pi^2 t}$$

Der Ansatz $v_2(t) = k$ liefert $\quad k = \dfrac{2}{\pi^2} \quad$. **[1 Punkt]**

$$v_2(t) = Ce^{-\pi^2 t} + \frac{2}{\pi^2} \qquad \text{und mit } v_2(0) = 0 \text{ folgt } c = -\frac{2}{\pi^2} \; \textbf{[1 Punkt]}$$

$$v_2(t) = \frac{2}{\pi^2}\left(1 - e^{-\pi^2 t}\right)$$

$$v^{**}(x,t) = \frac{2}{\pi^2}\left(1 - e^{-\pi^2 t}\right)\sin(\pi x) \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

und damit gilt

$$v(x,t) = v^*(x,t) + v^{**}(x,t) = e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x) + 2\,e^{-4\pi^2 t}\sin(2\pi x) + \frac{2}{\pi^2}\left(1 - e^{-\pi^2 t}\right)\sin(\pi x)$$

b) Mit

$$v(x,t) = u(x,t) \;-\; 0 \;-\; \frac{x-0}{2-0}(2-0) \;=\; u(x,t) \;-\; x \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

erhält man für v

$$v_t = u_t\,, \quad v_{xx} = u_{xx}\,, \quad v(x,0) = u(x,0) - x \qquad \textbf{[1 Punkte]}$$

und damit für v das Problem aus Teil a). Es gilt also

$$u(x,t) \;=\; v(x,t) + x \;=\; x + e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x) + 2\,e^{-4\pi^2 t}\sin(2\pi x) + \frac{2}{\pi^2}\left(1 - e^{-\pi^2 t}\right)\sin(\pi x).$$

[1 Punkte]