Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t - 4e^{-x}u_x &= -1 \qquad && x \in \mathbb{R}\,, t > 0\,, \\ u(x,0) &= x && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem und zeichnen Sie die Charakteristiken durch die Punkte $(x,t) = (1,0)$ und $(x,t) = (2,0)$.

$$\begin{aligned} xu_t - tu_x &= 0 \qquad && x \in \mathbb{R}\,, t > 0\,. \\ u(x,0) &= \frac{1}{1+x^2} && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Lösung:

a)

$$\frac{dx}{dt} = -4e^{-x}, \qquad \frac{du}{dt} = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$u = -t + C \Longrightarrow C = u + t \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$e^x dx = -4dt \Longrightarrow e^x = -4t + D \Longrightarrow D = e^x + 4t\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$C = f(D) \Longrightarrow u + t = f(e^x + 4t)$$

Anfangswerte liefern :

$$u(x,0) - 0 = f(e^x) = x \Longrightarrow f(y) = \ln(y) \Longrightarrow u(x,t) = -t + \ln(e^x + 4t)$$

[2 Punkte]

b)

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}, \qquad x \neq 0 \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$xdx = -tdt \Longrightarrow \frac{x^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + \frac{k}{2} \Longrightarrow k =: C^2 = x^2 + t^2\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$u(x,t) = f(C) = f(x^2 + t^2) \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Anfangswerte liefern :

$$u(x,0) - 0 = f(x^2) = \frac{1}{1+x^2} \Longrightarrow f(y) = \frac{1}{1+y} \Longrightarrow u(x,t) = \frac{1}{1+x^2+t^2}$$

Die Charakteristiken sind Halbkreise mit Mittelpunkt Null. Für $x_0 = 0$ besteht die Charakteristik nur aus einem Punkt.

[2 Punkte]

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 9u_{xx} && x \in (0, \tfrac{1}{2}),\ t > 0, \\ u(x,0) &= 2x + \sin(2\pi x) && x \in [0, \tfrac{1}{2}], \\ u_t(x,0) &= 2x^2 - x && x \in [0, \tfrac{1}{2}], \\ u(0,t) &= 0 && t \geq 0, \\ u(\tfrac{1}{2},t) &= 1 && t \geq 0. \end{aligned}$$

Hinweis: Homogenisieren Sie zuerst die Randbedigungen.

Lösung: Definiere $v = u - 0 - \dfrac{x}{0.5}(1-0) \ = \ u - 2x\,.$

u ist genau dann Lösung, wenn folgende Beziehungen gelten:

$v_{tt} = u_{tt}, \quad v_{xx} = u_{xx},$

$v(x,0) = \sin(2\pi x), \quad v_t(x,0) = 2x^2 - x, \quad v(0,t) = v(\pi,t) = 0$

Zu lösen bleibt also die Wellengleichung mit den obigen Anfangswerten für v und homogenen Randwerten.

Fourierentwicklung von $v(x,0)$ und $v_t(x,0)$ nach den Funktionen

$\sin(k\omega x) \ = \ \sin(k \cdot \frac{\pi}{L} \cdot x) \ = \ \sin(k \cdot \frac{\pi}{0.5} \cdot x) \ = \ \sin(2k\pi x)$

ergibt

$v(x,0) = \sin(2\pi x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(2k\pi x) \implies a_1 = 1,\ a_k = 0$ sonst.

$v_t(x,0) = 2x^2 - x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2k\pi x) \implies$

$$b_k = \tfrac{2}{0.5} \int_0^{0.5} (2x^2 - x) \sin(2k\pi x) dx$$

$$= -\frac{4}{2k\pi} \cos(2k\pi x)(2x^2 - x)\Big|_0^{0.5} + \frac{4}{2k\pi} \int_0^{0.5} (4x-1) \cos(2k\pi x)\, dx$$

$$= \frac{1}{k^2\pi^2} \sin(2k\pi x)(4x-1)\Big|_0^{0.5} - \frac{1}{k^2\pi^2} \int_0^{0.5} 4 \sin(2k\pi x)\, dx$$

$$= \frac{4}{2k^3\pi^3} \cos(2k\pi x)\Big|_0^{0.5} = \frac{2}{k^3\pi^3} (\cos(k\pi) - 1) = \begin{cases} 0 & k \text{ gerade}, \\ \frac{-4}{k^3\pi^3} & k \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Nach der allgemeinen Formel aus der Vorlesung gilt mit $A_k = a_k,\ B_k = \dfrac{L}{ck\pi} b_k$

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos(\frac{ck\pi}{L} t) \ + \ B_k \sin(\frac{ck\pi}{L} t) \right] \sin(\frac{k\pi}{L} x)$$

Hier also mit $B_k = \dfrac{0.5}{3k\pi} b_k = \dfrac{1}{6k\pi} b_k$

$$v(x,t) = \cos(6\pi t)\sin(2\pi x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3(2k-1)^3\pi^4} \sin(6(2k-1)\pi t)\sin(2(2k-1)\pi x) \cdot$$

Die Lösung des ursprünglichen Problems lautet dann $u = v + 2x$.