Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2010**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 21:
Die Telegraphengleichung $u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0$ beschreibt den zeitlichen Verlauf einer Signalspannung u am Ort $x > 0$ in einem langen Übertragungskabel.

Gesucht ist die Signalspannung $u(x,t)$, wenn am Rand $x = 0$ des Übertragungskabels ein periodisches Signal der Form $u(0,t) = 3\sin(2t)$, für $t \geq 0$, eingespeist wird. Außerdem soll die Signalspannung u für $x \to \infty$ beschränkt sein.

a) Man zeige, dass ein Produktansatz der Form $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ zu keiner Lösung führt.

b) Man versuche den Lösungsansatz $u(x,t) = u_0 e^{-ax} \sin(2t - bx)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

Aufgabe 22:
Man zeige, dass die Funktion

$$u(x,t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau$$

eine Lösung der Anfangswertaufgabe für die inhomogene Wellengleichung mit homogenen Anfangsdaten liefert:

$$\begin{aligned} &u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) \\ &u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 23: (aus dem Vordiplom 15.10.01)
Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{array}{rcll} u_{tt} - u_{xx} & = & -4x\,, & x \in \mathbb{R},\ t > 0\,, \\ u(x,0) & = & 1\,, & x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) & = & \cos x\,, & x \in \mathbb{R} \end{array}$$

und bestätige die Lösung durch Einsetzen in die Anfangswertaufgabe.

Hinweis: Man bestimme zunächst eine Lösung für die inhomogene Wellengleichung mit homogenen Anfangsdaten und verwende anschließend das Superpositionsprinzip.

Aufgabe 24:
Man löse das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{array}{rclll} u_{tt} - u_{xx} & = & 0\,, & x \in \mathbb{R}_+\,, & t > 0\,, \\ u(x,0) & = & u_0(x)\,, & x \geq 0\,, & \\ u_t(x,0) & = & v_0(x)\,, & & \\ u(0,t) & = & 0\,, & t > 0 & \end{array}$$

mit Hilfe der Reflexionsmethode und kläre, ob es sich bei der gefundenen Lösung um eine C^2-Funktion handelt, für

a) $u_0(x) = x, \quad v_0(x) = x^2$,

b) $u_0(x) = \sin x, \quad v_0(x) = 1$.

Abgabetermin: 29.6.- 1.7. (zu Beginn der Übung)