Dgl III   Vo 14.04.10

Bärwolf. Höh. Mat.

Burg/Haf/Wille/Meister

Spiegel / Schaum Serie / Höh. Mat. f. Ing.

$u_t + q_x = 0$

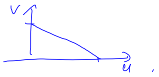
z.B. Transport (Konvektion) $q = u \cdot v$ $u_t + (uv)_x = 0$

Diffusion $q = -c u_x$ $u_t = c u_{xx}$

Konvektion-Diffusion $q = u \cdot v - c u_x$

$u_t + (uv)_x = -c u_{xx}$

z.B. Verkehr $v = (1-u)$
u Dichte



$u_t + (u \underbrace{(1-u)}_{v})_x = 0$

quasilinear

$u_t + \underbrace{(1-2u)}_{a(u)} u_x = 0$

Apr 14-11:29

Kapitel 2: Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

2.1 Die Methode der Charakteristiken

Wir betrachten zunächst eine skalare quasilineare PDE 1. Ordnung gegeben durch

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathrm{x}, u) u_{x_i} = b(\mathrm{x}, u), \qquad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$$

Eine Lösung kann durch die **Charakteristikenmethode** berechnet werden, wobei wir zunächst den homogenen und **linearen** Fall betrachten.

Definition: Das autonome System gewöhnlicher Differentialgleichungen

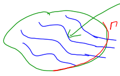
$$\dot{\mathrm{x}}(\tau) = \mathrm{a}(\mathrm{x}(\tau))$$

heißt das **charakteristische Differentialgleichungssystem** einer homogenen linearen PDE

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathrm{x}) u_{x_i} = 0, \qquad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$$

13

Apr 14-11:50



$\sum a_i(x) u_{x_i} = 0$

$\dot{x}(\tau) = a(x(\tau))$

u ist Konst entlang

auf Γ Randbedingungen
⇒ i.e. eindeutige Lösung

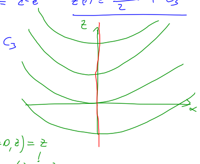
$\underbrace{x}_{a_1} u_x + \underbrace{x^2}_{a_2} u_z = 0$

$\dot{x}(\tau) = x(\tau) = a_1$ $x(\tau) = c e^{\tau}$

$\dot{z}(\tau) = x^2(\tau) = a_2 = c^2 e^{2\tau}$ $z(\tau) = \frac{c^2 e^{2\tau}}{2} + c_3$

$z = \frac{x^2}{2} + c_3$

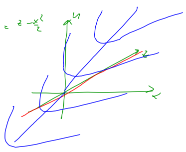
$\Rightarrow u = u\left(z - \frac{x^2}{2}\right)$



RB: z.B. $u(x=0, z) = z$

$u\left(z - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{x=0} = u(z) \overset{!}{=} z$

$\Rightarrow \quad u\left(z - \frac{x^2}{2}\right) = z - \frac{x^2}{2}$



Apr 14-11:53

Apr 14-12:07

Beispiel: Wir betrachten die PDE in drei Variablen

$$\underbrace{x}_{a_1} u_x + \underbrace{y}_{a_2} u_y + \underbrace{(x^2+y^2)}_{a_3} u_z = 0$$

Das charakteristische System lautet dann

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x & &= a_1 \\ \dot{y} &= y & &= a_2 \\ \dot{z} &= x^2 + y^2 & &= a_3 \end{aligned}$$

und besitzt die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^t \\ y(t) &= c_2 e^t \\ z(t) &= \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2) e^{2t} + c_3 \end{aligned}$$

Man nennt diese Lösungen auch die charakteristischen Kurven.

15

Apr 14-12:09

Apr 14-12:16

Quasilineare inhomogene Differentialgleichungen

Die Methode der Charakteristiken läßt sich auf Gleichungen der Form

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathrm{x},u)u_{x_i} = b(\mathrm{x},u), \qquad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$$

quasilinear inhomogen ⇓

übertragen.

Man betrachtet dazu das erweiterte Problem

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathrm{x},u)U_{x_i} + b(\mathrm{x},u)U_u = 0, \qquad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$$

linear homogen !!!

mit der unbekannten Funktion $U = U(\mathrm{x},u)$ von $(n+1)$ unabhängigen Variablen x und u.

Dann gilt: Ist $U(\mathrm{x},u)$ eine Lösung mit $U_u \neq 0$, so ist durch $U(\mathrm{x},u) = 0$ implizit eine Lösung $u = u(\mathrm{x})$ des Ausgangsproblems gegeben.

Gleichung für $u = u(x)$

17

Apr 14-12:17

Beweis:

Gilt $U_u \neq 0$, so läßt die Funktion $U(x,u)$ nach dem Satz über implizite Funktionen nach $u(\mathrm{x})$ auflösen. Wegen $U(\mathrm{x},u) = 0$ gilt dann $U(x,u(x)) = 0$

$$U_{x_i} + U_u u_{x_i} = 0 \qquad / \tfrac{\partial}{\partial x_i}$$

Ferner haben wir $= -U_u u_{x_i}$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathrm{x},u)U_{x_i} + b(\mathrm{x},u)U_u = 0$$

und daraus folgt

$$-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathrm{x},u)u_{x_i}\right)U_u + b(\mathrm{x},u)U_u = 0 = \left[\sum_i a_i u_{x_i} + b\right]U_u = 0$$

Wir erhalten also mit $U_u \neq 0$ die Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathrm{x},u)u_{x_i} = b(\mathrm{x},u)$$

18

Apr 14-12:21

Beispiel: Gesucht ist die allgemeine Lösung der quasilinearen Gleichung

$$(1+x)u_x - (1+y)u_y = y - x$$

eigentlich linear

Das erweiterte Problem lautet dann

$$\underbrace{(1+x)}_{a_1}U_x - \underbrace{(1+y)}_{a_2}U_y + \underbrace{(y-x)}_{a_3}U_u = 0$$

Das charakteristische Differentialgleichungssystem ist

$$\begin{aligned} (1+x)' = \dot{x} &= 1+x = a_1 \\ (1+y)' = \dot{y} &= -(1+y) = a_2 \\ \dot{u} &= y-x = a_3 \end{aligned}$$

Gew. Dgl !!

mit der allgemeinen Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1e^t - 1 \\ y(t) &= c_2e^{-t} - 1 \\ u(t) &= c_3 - c_2e^{-t} - c_1e^t \end{aligned}$$

19

Apr 14-12:25

Wir verfahren wie im letzten Beispiel und lösen das charakteristische System auf:

$$e^t = \frac{x+1}{c_1} = \frac{c_2}{y+1} \quad \Rightarrow \quad \underline{(x+1)(y+1)} = c_1 \cdot c_2 = \underline{c} \in \mathbb{R}$$

und

$$u = c_3 - (x+1) - (y+1) \quad \Rightarrow \quad \underline{u + x + y = d} \in \mathbb{R}$$

Wieder bestimmen alleine die beiden Konstanten c und d das Lösungsverhalten.

Daraus folgt die allerdings **implizite** Lösungdarstellung

$$\Phi((x+1)(y+1), u+x+y) = 0$$

mit einer beliebigen C^1–Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Beachte: Im Gegensatz zu linearen Gleichungen erhält man bei quasilinearen Gleichungen keine explizite Lösungsdarstellung und die Lösung existiert gegebenenfalls nur lokal.

$+ RB \Rightarrow \Phi$

nach u auflösen $\Rightarrow u = u(x,y)$

20

Apr 14-12:28

Apr 14-12:30

Ein typisches **Beispiel** ist die Transportgleichung aus Kapitel 1:

$$\begin{cases} 1 \cdot u_t + \underline{\mathrm{a}} \cdot \nabla u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

mit dem konstanten Vektor $\mathrm{a} \in \mathbb{R}^n$.

Verwenden wir hier die Methode der Charakteristiken, so erhalten wir zunächst die $(n+1)$ Differentialgleichungen

$$\frac{dt}{d\tau} = \underline{\underline{1}}, \qquad \frac{d\mathrm{x}}{d\tau} = \underline{\underline{\mathrm{a}}}$$

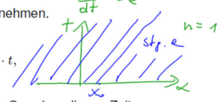
$t = \tau$

$\frac{dx}{dt} = a$

und wir können ohne Einschränkung $t = \tau$ annehmen.

Die Lösung der zweiten Gleichung lautet dann

$$\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}_0 + \mathrm{a} \cdot t,$$

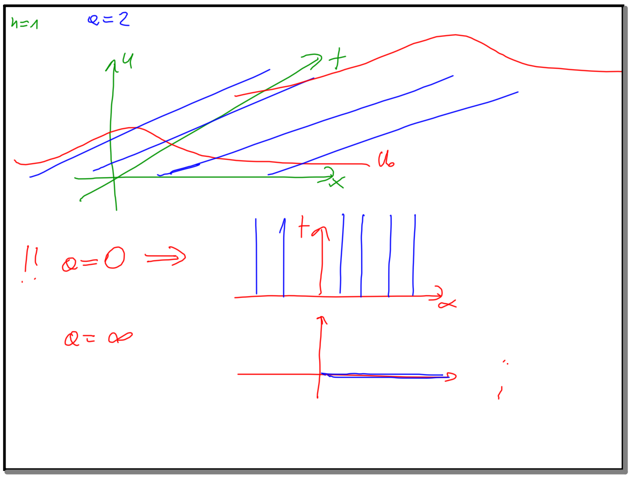


mit einer Anfangsbedingung $\mathrm{x}(0) = \mathrm{x}_0$.

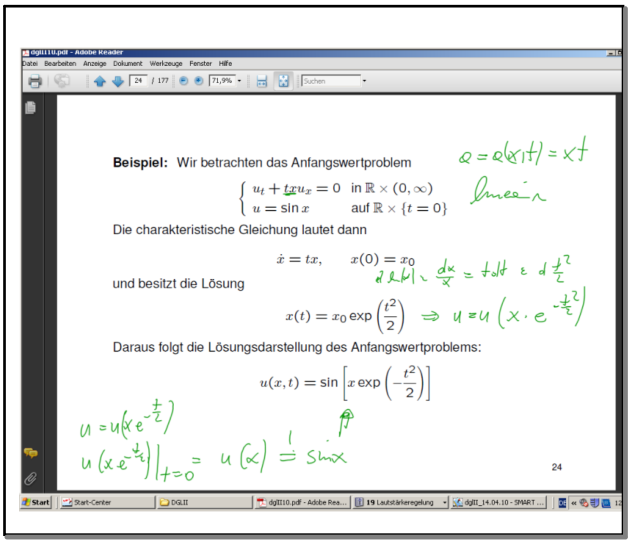
Die charakteristischen Kurven sind also gerade Geraden, die zur Zeit $t = 0$ den Punkt x_0 durchlaufen und in Richtung a laufen.

22

Apr 14-12:40



Apr 14-12:42



dgl110.pdf - Adobe Reader

Beispiel: Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + tx u_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = \sin x & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Die charakteristische Gleichung lautet dann

$$\dot{x} = tx, \qquad x(0) = x_0$$

und besitzt die Lösung

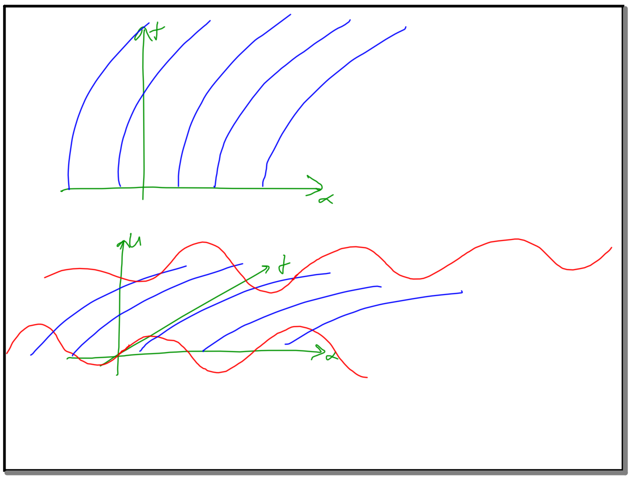
$$x(t) = x_0 \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

Daraus folgt die Lösungsdarstellung des Anfangswertproblems:

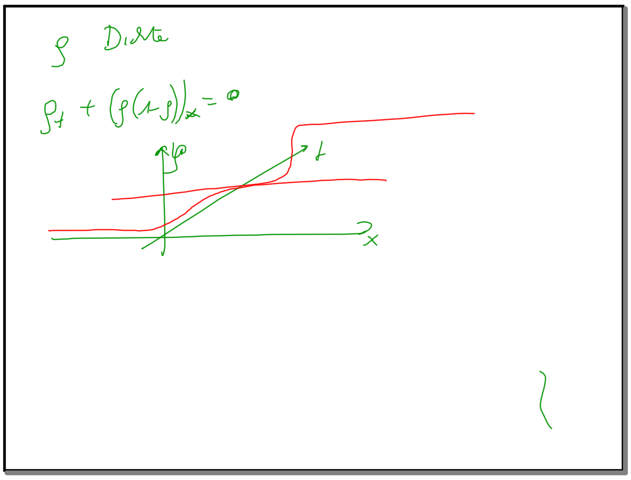
$$u(x,t) = \sin\left[x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right]$$

24

Apr 14-12:47



Apr 14-12:47



Apr 14-12:49