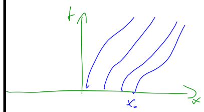
Vo DgL II 21.4.10

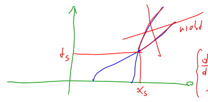
$1 \cdot u_t + a(x,t)\, u_x = 0$

$\frac{dt}{d\tau} = 1 \Rightarrow t = \tau + c$

$\frac{dx}{d\tau} = a(x,t)$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = a(x(t),t)$ gew. Dgl $x(0) = x_0$





$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x,t) \\ x(t_s) = x_s \end{cases}$

falls a glatt (stetig + Lipschitz in x)

$\Longrightarrow$ eindeutig lösbar

$u = u(x(t),t)$

$\frac{d}{dt} u = \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = u_t + a\, u_x \overset{!}{=} 0$ gl.

u entl. von Charakteristiken Konstant !!!

Apr 21-11:29

Das charakteristische System lautet dann

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x,t,u) \\ \dot{u} &= b(x,t,u) \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $u(0) = u_0(x_0)$.

Dies ist ein gekoppeltes nichtlineares Differentialgleichungssystem, das unter Umständen nur lokale Lösungen in der Zeit besitzt. Im Allgemeinen wird daher die Methode der Charakteristiken nur lokal in der Zeit eine Lösung liefern.

$\frac{d}{dt} u(x(t),t) = u_t + \sum \underbrace{a_i}_{\frac{dx_i}{dt}} u_{x_i} = b$ gl.

25

Apr 21-11:49

Verkehr

$\rho_t + (\underbrace{\rho(1-\rho)}_{})_x = 0$

$V = V(\rho)$

$f(\rho) = \rho(1-\rho)$

Trafo

$u = 1 - 2\rho$

$u_t = -2\rho_t$

$u_x = -2\rho_x$

$\rho_t + (1-2\rho)\rho_x = 0 \quad /(-2)$

$\Rightarrow u_t + u u_x = 0 \qquad u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$

Apr 21-11:50

$\{ \; 0 \; : \; x \geq 1$

und verwenden die Methode der Charakteristiken, um die Lösung zu bestimmen.

Die charakteristische Gleichung lautet $\quad \dot{x}(t) = u(x(t),t) = u_0(x_0)$

$\dot{x} = a$

$\dot{u} = b$

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x_0$$

$\frac{d}{dt} u(x(t),t) = u_t + u_x \dot{x} = u_t + u u_x \overset{!}{=} 0$

[a]Johannes Martinus Burgers, 1895–1981, niederländischer Physiker

$u(x(t),t) = u(x(0),0) = u_0(x_0)$

27

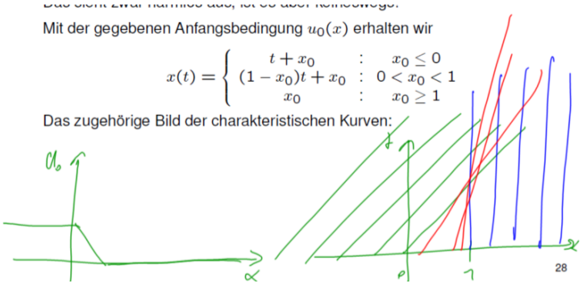
Apr 21-11:57

Das sieht zwar harmlos aus, ist es aber keineswegs.

Mit der gegebenen Anfangsbedingung $u_0(x)$ erhalten wir

$$x(t) = \begin{cases} t + x_0 & : \; x_0 \leq 0 \\ (1-x_0)t + x_0 & : \; 0 < x_0 < 1 \\ x_0 & : \; x_0 \geq 1 \end{cases}$$

Das zugehörige Bild der charakteristischen Kurven:

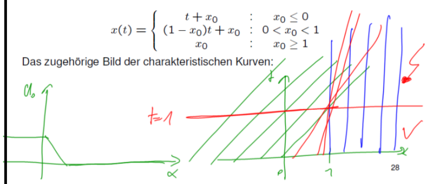


28

Apr 21-12:00

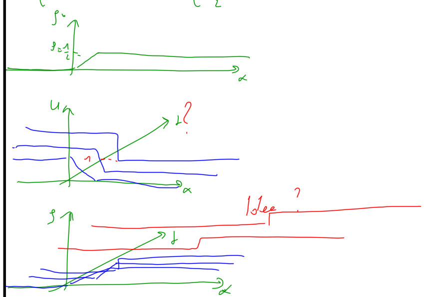
$$x(t) = \begin{cases} t + x_0 & : \; x_0 \leq 0 \\ (1-x_0)t + x_0 & : \; 0 < x_0 < 1 \\ x_0 & : \; x_0 \geq 1 \end{cases}$$

Das zugehörige Bild der charakteristischen Kurven:



28

$u = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \rho = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$



Apr 21-12:02

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty u_t v \, dx\, dt = \int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty u v_t \, dx\, dt + \cancel{\int u v \, dx \Big|_{-\infty}^{+\infty}} - \underbrace{\int_{-\infty}^\infty uv \, dx \Big|_{t=0}}$$

$\lim_{t\to\infty} v(x,t) = 0$ Komp Tr.

$$\int_{-\infty}^\infty \underbrace{u(x,0)}_{u_0(x)} v(x,0)\, dx$$

Apr 21-12:13

Bemerkung:
Eine Integrallösung muß **keine** differenzierbare Funktion sein, sondern kann sogar **Sprungstellen** besitzen.

u unstetig ✓ $\qquad \forall v$?

u glatt $\Rightarrow u_t + f(u)_x = 0$

33

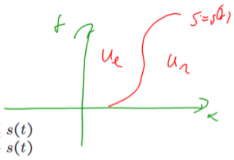
Apr 21-12:23

Was sind in diesem Fall die Integrallösungen?

1) **Stoßwellenlösung** bei der Burgers Gleichung

Für $u_l \neq u_r$ ist die sogenannte Stoßwelle

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & : \; x \leq s(t) \\ u_r & : \; x > s(t) \end{cases}$$



Apr 21-12:27

Herleitung der Rankine–Hugoniot Bedingung

Eine Integrallösung erfüllt die Beziehung

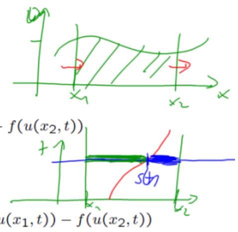
$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u(\xi,t)d\xi = f(u(x_1,t)) - f(u(x_2,t))$$

Wählen wir $x_1 < s(t) < x_2$ so folgt:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{x_1}^{s(t)} u(\xi,t)d\xi + \int_{s(t)}^{x_2} u(\xi,t)d\xi\right) = f(u(x_1,t)) - f(u(x_2,t))$$

Da $u(x,t)$ für $x < s(t)$ und $x > s(t)$ nach Definition eine differenzierbare Lösung ist, können wir unter den beiden Integralen ableiten:

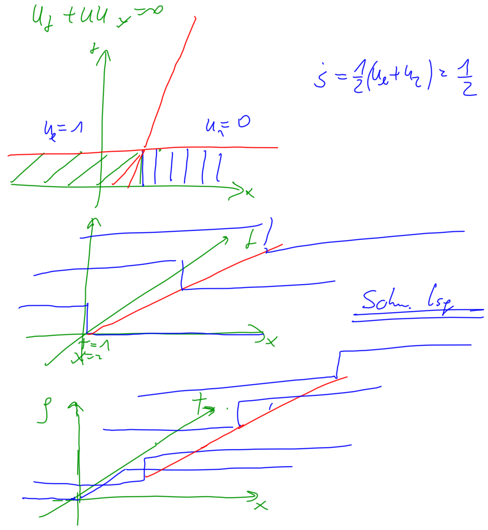
$$\int_{x_1}^{s(t)} \frac{\partial u}{\partial t} d\xi + \dot{s}\, u(s(t)^-, t) + \int_{s(t)}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t} d\xi - \dot{s}\, u(s(t)^+, t) + f_2 - f_1 = 0$$



Apr 21-12:41

$u_t + u u_x = 0$

$\dot{s} = \frac{1}{2}(u_l + u_r) = \frac{1}{2}$

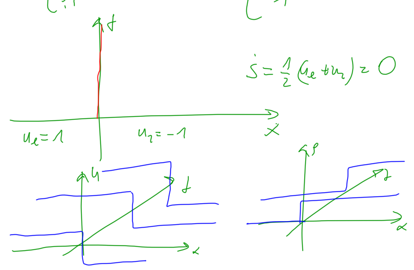


Apr 21-12:43

Stoßwelle

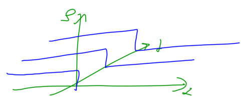
$\rho = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow u = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

$\dot{s} = \frac{1}{2}(u_l + u_r) = 0$



Anpol,

$\rho = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \qquad u = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases} \qquad \dot{s} = 0$



Apr 21-12:48

$u_t + f(u)_x = 0$

$u_t + f'(u)\, u_x = 0$

Ansatz $\quad u(x,t) = \phi\left(\frac{x}{t}\right)$ $\qquad$ Konst entl. eines Strahls $\frac{x}{t} = \text{const}$

$u_t = \phi'\left(-\frac{x}{t^2}\right)$ $\qquad \frac{x}{t} = \xi$

$u_x = \phi' \cdot \frac{1}{t}$

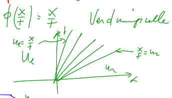
$u_t + f'(u)\, u_x = \frac{\phi'(\xi)}{t} \underbrace{\left(-\xi + f'(\phi)\right)}_{} \stackrel{!}{=} 0$

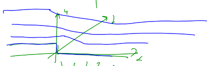
$\Longrightarrow \quad +\xi = f'(\phi(\xi))$

$\phi(\xi) = (f')^{-1}(\xi)$

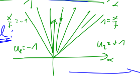
<u>Burgers</u> $\; f'(u) = u \qquad \xi = \phi(\xi)$

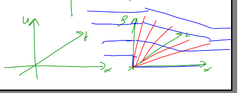
$u(x,t) = \phi\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{t}$ $\qquad$ Verdünnungswelle





<u>Ampel</u>:





Apr 21-12:53