Vo DgL II 28.5.10

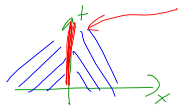
$$\rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$$

$$\rho_t + (1-2\rho)\rho_x = 0 \quad \downarrow \quad u_t + u u_x = 0$$

$$u = 1-2\rho$$

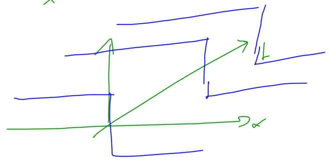
Klassische Lsg. reichen nicht aus!

schwache Lsg.! $\Rightarrow$ Sprungbedingung!

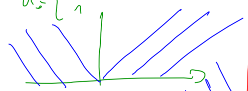


Steigung $\dot{s} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}$

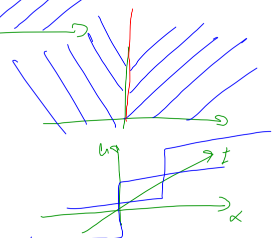
$u_0 = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$



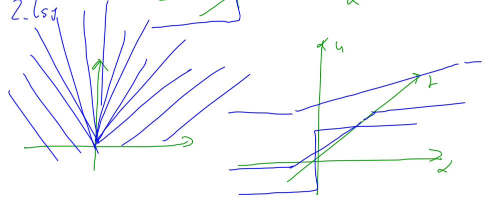
$u_0 = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$



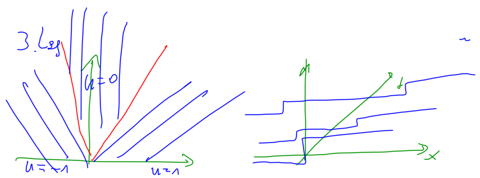
1. Lsg.



2. Lsg.

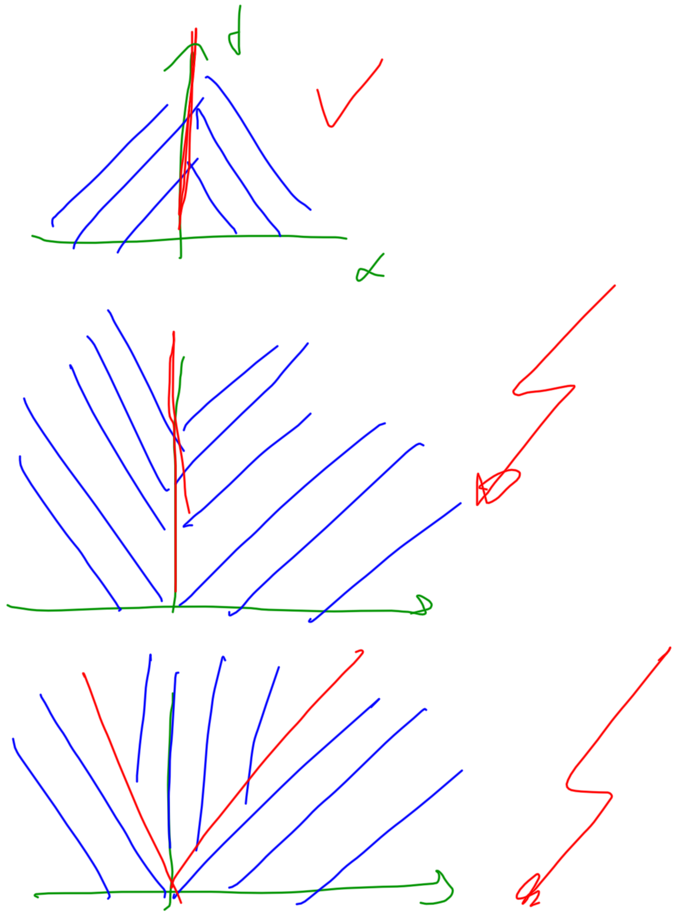


3. Lsg.



Entropiebedingung

Lax: Charakteristiken müssen
in die Unstetigkeit hineinlaufen!



all:

= const., $i, j = 1, \ldots, n$, so läßt sich die PDE auch in folgender Matrix-
eise darstellen:

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla) u + (\mathbf{b}^t \nabla) u + f u = g$$

ymmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$.

$$= \sum_{i,j} (a_{ij} \, u_{x_j})_{x_i} = \mathrm{div}(A \nabla u)$$

47

2. Ordnung

$$\sum a_{ij} u_{x_i x_j} = \dots \; a_{ij} u_{x_i x_j} + a_{ji} u_{x_j x_i} + \dots$$

$$= \dots \left(\frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}\right)\left(u_{x_i x_j} + u_{x_j x_i}\right) \dots$$

falls u 2x st. diffbar!

ur Herleitung von Normalformen:

die Koordinatentransformation

$$\mathrm{x} = \mathrm{S}\mathrm{y} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{y} = \mathrm{S}^T \mathrm{x}$$

$y_j = \sum_{i=1}^{n} (S^T)_{ji}\, x_i$

$= \sum_{i=1}^{n} s_{ij}\, x_i$

$$\tilde{u}(\mathrm{y}) := u(\mathrm{S}\,\mathrm{y}) = u(y)$$

$= \tilde{u}(\mathrm{S}^T \mathrm{x})$ folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$$

$\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = s_{ij}$ gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j}$$

$\nabla_x u = S \nabla_y \tilde{u}$

s:

e Gleichung

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla) u + (\mathbf{b}^t \nabla) u + f u = g \qquad (\text{in } X)$$

en wir für $\tilde{u}$ die PDE

$$(\nabla^T \underbrace{\mathbf{S}^T \mathbf{A} \mathbf{S}} \nabla) \tilde{u} + (\mathbf{b}^t \mathbf{S} \nabla) \tilde{u} + \tilde{f} \tilde{u} = \tilde{g} \qquad (\text{in } Y)$$

$S^{-1} A S = D$

Bsp

$\Delta u = 0$ ist schon in Normalform

$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_n = 1$ elliptisch

$-\Delta u = f$ elliptisch

$u_t = u_{xx}$ $\qquad$ $\underbrace{0 \cdot u_{tt} - 1 u_{xx}}_{HT} + u_t = 0$ $\qquad$ parabolisch

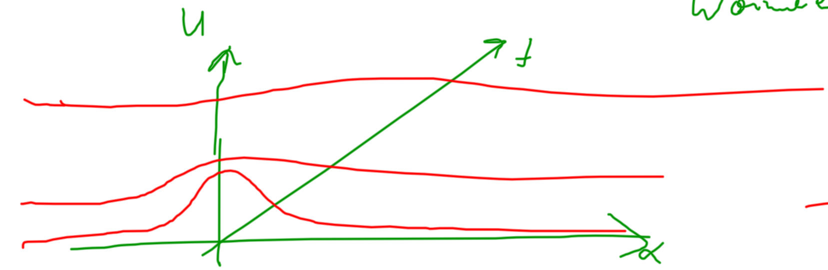
$u_t = \Delta u$ $\qquad$ $0 \cdot u_{tt} + 1 u_{x_1x_1} + \dots \cdot 1 \cdot u_{x_nx_n} + u_t = 0$ $\qquad$ parabolisch

---

$u_{tt} = u_{xx}$ $\qquad$ $1 \cdot u_{tt} - 1 u_{xx} = 0$ $\qquad$ hyperbolisch

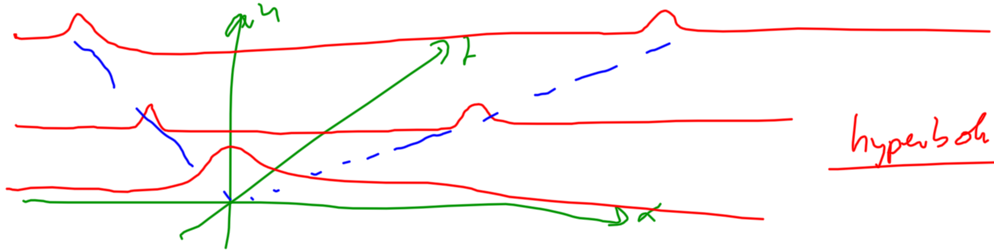
$u_{tt} = \Delta u$ $\qquad$ $1\, u_{tt} - 1 u_{x_1x_1} - \dots - 1 u_{x_nx_n} = 0$ $\qquad$ hyperbolisch

Wärmeleitung (Diffusion)



parabolisch

Wellengl.



hyperbolisch

ng:

einteilung läßt sich auf Fälle mit **nichtkonstanter** tenmatrix $\mathbf{A}$ erweitern: die Gleichung

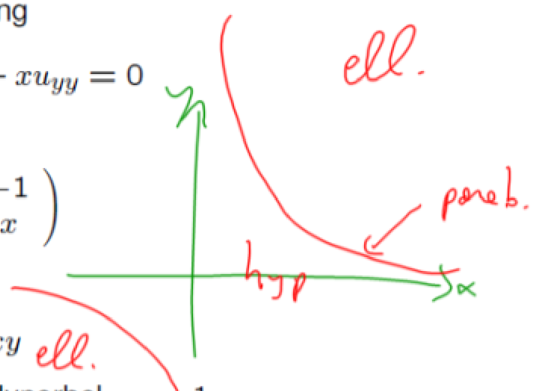
$$yu_{xx} - u_{xy} - u_{yx} + xu_{yy} = 0$$

effizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} y & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$$

minante D lautet daher

$$D = 1 - xy$$



ıung ist also **parabolisch** auf der Hyperbel $xy = 1$, in den beiden konvexen Bereichen $xy > 1$ und **isch** im zusammenhängenden Bereich $xy < 1$.

$$(x+y)\ \underbrace{+xy-1} = 0$$

e Beispiele:

sche Laplacegleichung

$$\Delta u = 0,$$

bolische Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0,$$

olische Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta u,$$

stationäres Verhalten von hyp parab. Gl.

58

ig bestimmte Lösung ist (**Formel von d'Alembert**): eindeutig ?

$$(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(x-ct) + u_0(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi)\,d\xi$$

hängigkeit von den Anfangsdaten:

die Lösung zu den Anfangsdaten $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$. Dann gilt:

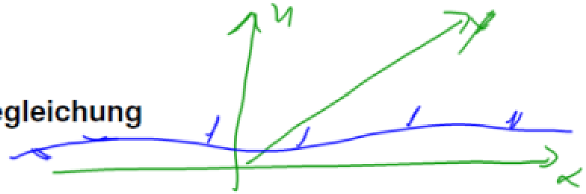
$$\begin{aligned}\tilde{u}(x,t) - u(x,t) &= \frac{1}{2}(\tilde{u}_0(x-ct) - u_0(x-ct)) \\ &+ \frac{1}{2}(\tilde{u}_0(x+ct) - u_0(x+ct)) \\ &+ \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} (\tilde{v}_0(\xi) - v_0(\xi))\,d\xi\end{aligned}$$

$x+ct-(x-ct) = \underline{2ct}$

t aber

$$|\tilde{u}(x,t) - u(x,t)| \le \underbrace{\|\tilde{u}_0 - u_0\|_\infty}_{\sup_z |\tilde{u}_0(z) - u_0(z)|} + t\|\tilde{v}_0 - v_0\|_\infty$$

swertaufgabe für die Laplacegleichung



l: (Hadamard)

angswertproblem für die zweidimensionale Laplacegleichung

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u = u_0, u_y = v_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{y = 0\} \end{cases}$$

icht korrekt gestelltes elliptisches Problem.

vir $u_0(x) = v_0(x) = 0$, so ist die eindeutig bestimmte Lösung
ı durch

$$u(x, y) = 0$$

die Anfangsdaten dagegen

$$u_o^n(x) = 0, \quad v_o^n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}$$