Vo Dgl II 12.5.10

Proposition:

Sei $u \in \mathcal{C}^2(\bar{U})$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt für alle Punkte $\mathbf{x} \in U$ die Beziehung

$$
\begin{aligned}
u(\mathbf{x}) \;&=\; \underset{?}{\underline{\int\limits_{\partial U} \Big(\Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y})}} - \underbrace{u(y)}_{g}\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\Big)dS(\mathbf{y}) \\
&\quad - \int\limits_{U} \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})\underbrace{\Delta u(\mathbf{y})}_{-f}d\mathbf{y}
\end{aligned}
$$

$$\int_U (f \Delta g - g \Delta f)\, dx = \int_{\partial U} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n}\right) ds$$

$$\int_U \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial U} F \cdot n \, dS \qquad \text{Gauss}$$

$F_1 = f \nabla g \quad , \quad \operatorname{div} F_1 = \nabla f \cdot \nabla g + f \Delta g$

$F_2 = g \nabla f$

. – –

Beweis:

Nach obiger Proposition hatten wir die Lösungsdarstellung

$$u(\mathrm{x}) = \int_{\partial U} \left(\Phi(\mathrm{y}-\mathrm{x})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathrm{y}) - u(\mathrm{y})\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathrm{y}-\mathrm{x})\right)dS(\mathrm{y}) - \int_U \Phi(\mathrm{y}-\mathrm{x})\Delta u(\mathrm{y})d\mathrm{y}$$

Das Problem dabei war, dass uns beim Dirichlet–Problem die Randdaten von $\partial u/\partial \mathbf{n}$ nicht bekannt sind.

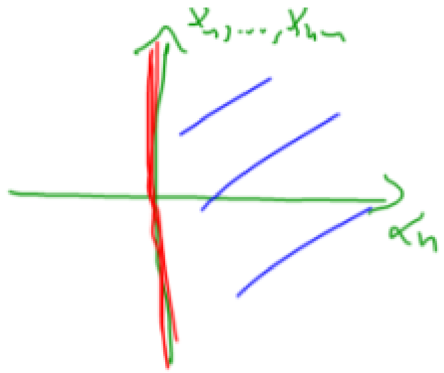
Nach den Greenschen Formeln gilt aber

RB für ϕ^x

$$\underbrace{\int_U \phi^x(y)}_{=0} u(y)\,dy \qquad - \int_U \Phi^x(\mathrm{y})\underbrace{\Delta u(\mathrm{y})}_{-f}d\mathrm{y} = \int_{\partial U} \underbrace{u(\mathrm{y})}_{g}\frac{\partial \Phi^x}{\partial \mathbf{n}}(\mathrm{y}) - \overbrace{\Phi^x(\mathrm{y})}^{\phi(y-x)}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathrm{y})dS(\mathrm{y})$$

und daher

$$\int_{\partial U} \Phi^x(\mathrm{y})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathrm{y})dS(\mathrm{y}) = \int_U \Phi^x(\mathrm{y})\Delta u(\mathrm{y})d\mathrm{y} + \int_{\partial U} u(\mathrm{y})\frac{\partial \Phi^x}{\partial \mathbf{n}}(\mathrm{y})dS(\mathrm{y})$$



Die Greensche Funktion für den Halbraum $\mathbb{R}^n_+$:

Allgemein ist die Greensche Funktion gegeben durch

$$G(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \Phi(\mathrm{y} - \mathrm{x}) - \Phi^x(\mathrm{y})$$

Dabei ist $\Phi(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ die Fundamentallösung und $\Phi^x(\mathrm{y})$ die Lösung von

$$\begin{cases} \Delta\Phi^x &= 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \\ \Phi^x &= \Phi(\mathrm{y} - \mathrm{x}) & \text{auf } \{\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \,:\, x_n = 0\} \end{cases}$$

Für einen Punkt $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ definieren wir die Reflektion an der Ebene $\partial\mathbb{R}^n_+$ mittels

$$\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$$

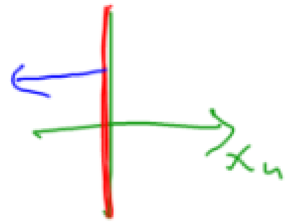
Wir betrachten nun die Funktion Ansatz

$$\Phi^x(\mathrm{y}) := \Phi(\mathrm{y} - \tilde{\mathrm{x}}) = \Phi(y_1 - x_1, \ldots, y_{n-1} - x_{n-1}, y_n + x_n) \quad (x, y \in \mathbb{R}^n_+)$$

$n \geq 3 \qquad \phi(y-x) = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \|y-x\|^{2-n} \qquad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Man berechnet nun

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial y_n}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}) \\ &= \frac{-1}{n\alpha(n)}\left[\frac{y_n - x_n}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^n} - \frac{y_n + x_n}{|\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}|^n}\right] \end{aligned}$$



Satz: (Dirichlet–Problem für die Laplacegleichung)

Die Lösung des Randwertproblems

$f = 0$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n_+ \\ u = g \text{ auf } \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T : x_n = 0\} \end{cases}$$

ist gegeben durch die Poissonsche Integralformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \Delta u = 0 & U \\ u = 1 & \partial U \end{matrix}}$$

$g = 1$ $\Downarrow$

$u \equiv 1$

Insbesondere ist die Lösung $u(\mathbf{x})$ wegen

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(\mathbf{x},\mathbf{y}) dy = 1$$

beschränkt, falls g beschränkt ist, Man kann weiter zeigen, dass die Lösung sogar **unendlich oft differenzierbar** ist.

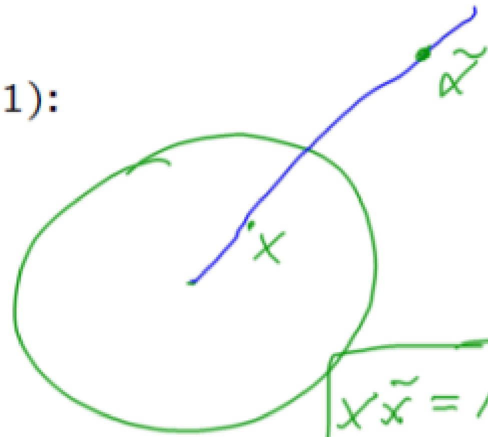
$$\|u\|_\infty \leq \left\| \int_{\partial U} K(\cdot,y) g(y) dy \right\| \leq \underbrace{\|K\|_\infty}_{=1} \|g\|_\infty \leq \|g\|_\infty$$

Die Greensche Funktion für die Einheitskugel $B(0,1)$:

Für $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, bezeichnet der Punkt

$$\tilde{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{x}}{|\mathrm{x}|^2}$$

den **dualen Punkt** von x bezüglich $\partial B(0,1)$.



$\boxed{x\tilde{x}=1}$

$= r^2$

Damit ist die Lösung des Korrekturproblems

$$\begin{cases} \Delta\Phi^x = 0 & \text{in } B^0(0,1) := \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n \mid \quad |\mathrm{x}| < 1\} \\ \Phi^x = \Phi(\mathrm{y} - \mathrm{x}) & \text{auf } \partial B(0,1) \end{cases}$$

gegeben durch

$$-\Delta u = f \quad \text{auf } U$$
$$u = g \quad \text{auf } \partial U$$

eindeutig lösbar ($\Leftarrow$ Maximumprinzip)

<u>Alternativ:</u> Energiemethoden

u_1, u_2 seien Lsgn. $\qquad w = u_1 - u_2$

$$\Delta w = 0 \quad \text{auf } U$$
$$w = 0 \quad \text{auf } \partial U$$

$$0 = -\int_U w\, \Delta w \, dx = \int_U |\nabla w|^2 dx + \underbrace{\int_{\partial U} \underbrace{w}_{=0} \nabla w \cdot n \, dS}_{=0}$$

$\Rightarrow \quad \nabla w \equiv 0$ in U

$\Rightarrow \quad w = \text{const}$ in U

$\Rightarrow \quad w$ stetig zum Rand ($w \in C(\overline{U})$)

$\Rightarrow \quad w \equiv 0$

$$\boxed{\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{auf } U \\ u &= g \quad \text{auf } \partial U \end{aligned}}$$

$$I[w] = \int_U \left(\tfrac{1}{2} |\nabla w|^2 - wf \right) dx$$

$$w \in A = \{ w \in C^2(\bar{U}) \mid w = g \text{ auf } \partial U \}$$

$$\boxed{I[u] = \min_{w \in A} I[w]}$$

$$0 = \int_U (-\Delta u - f)(u-w)\, dx = \int_U \nabla u \cdot \nabla (u-w)\, dx - \int_U f(u-w)\, dx$$

$$\cancel{+ \int_{\partial U} \underbrace{(u-w)}_{=0} \nabla u \cdot n \, dS}$$

$$\int_U (|\nabla u|^2 - fu)\, dx = \int_U \nabla u \cdot \nabla w - fw \leq$$

$$a \cdot b \leq \frac{|a|^2}{2} + \frac{|b|^2}{2}$$

$$\leq \int_U \tfrac{1}{2} |\nabla u|^2 + \int_U \tfrac{1}{2} |\nabla w|^2 - fw$$

$$I[u] = \int_U \left(\tfrac{1}{2} |\nabla u|^2 - fu \right) dx \leq \int_U \left(\tfrac{1}{2} |\nabla w|^2 - fw \right) dx = I[w] \quad \forall w \in A$$

Kapitel 5: Die Wärmeleitungsgleichung

Wir suchen explizite Lösungen der **Wärmeleitungsgleichung**

$$u_t = \Delta_x u$$

Hier ist $t \geq 0$ die **Zeitvariable** und $\mathbf{x} \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, die **Ortsvariable**.

Anfangswertproblem: (Cauchy–Problem)

Sei $U = \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

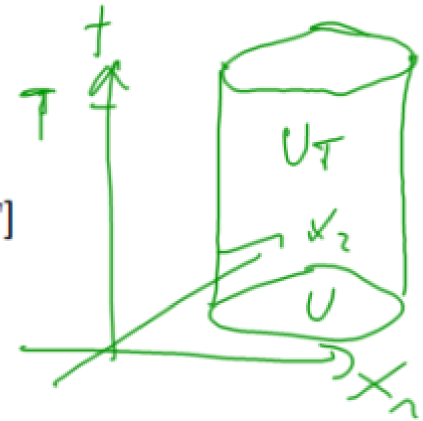
Anfangs–Randwertproblem:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } U_T := U \times (0,T] \\ u = g & \text{auf } \Gamma_T := \overline{U_T} \setminus U_T \end{cases}$$

Boden + Mantel

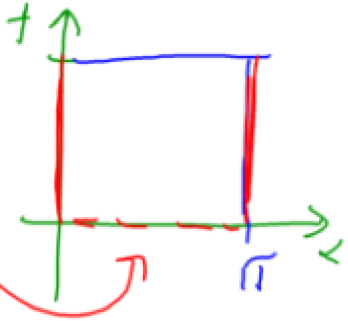
AB RB



5.1 Lösungen mittels Produktansätzen

Gegeben sei das eindimensionale Anfangs–Randwertproblem

$$\begin{array}{l} \\ \text{AB} \\ \text{RB} \end{array} \left\{ \begin{array}{rcll} u_t & = & u_{xx} & : \; 0 < x < \pi,\, 0 < t \leq T \\ u(x,0) & = & u_0(x) & : \; 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,t) & = & a(t),\; u(\pi,t) = b(t) & : \; 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$



Wir suchen eine Lösung mittels des **Produktansatzes**:

$$u(x,t) = p(x) \cdot q(t)$$

Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung ergibt

$$p(x)\dot{q}(t) = q(t)p''(x)$$

und damit die Beziehung

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{p''(x)}{p(x)} \qquad (p(x) \neq 0,\, q(t) \neq 0)$$

Beispiel:

Gegeben sei das eindimensionale Anfangs–Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : \; 0 < x < \pi,\, 0 < t \leq T \\ u(x,0) = \sin x & : \; 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,t) = 0,\; u(\pi,t) = 0 & : \; 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Aufgrund der vorgegebenen Randbedingungen fallen grundsätzlich die ersten beiden Lösungsklassen aus. Es bleibt also

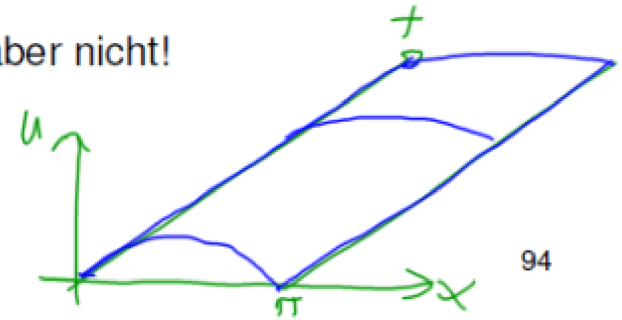
$$u(x,t) = c_0\, e^{-\delta t} \cdot (c_1 \sin(\sqrt{\delta} x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta} x))$$

Wegen der Vorgabe $u(x,0) = \sin x$ erhalten wir die Lösung $\delta = c_0 = c_1 = 1$

$c_2 = 0$

$$u(x,t) = e^{-t} \sin x$$

Das Beispiel sieht etwas künstlich aus, ist es aber nicht!



94