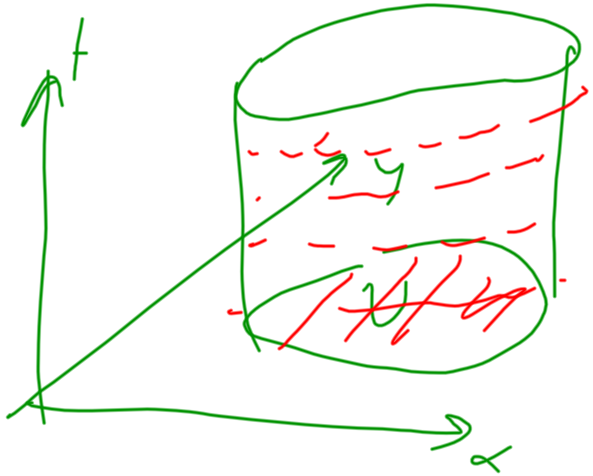
Vo DGl II 9. 06. 10

$$u_t = \Delta u + f$$

u_T

$u = u_0$ $t = 0$

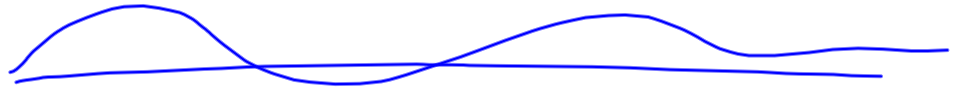
$u = u_D$ RB



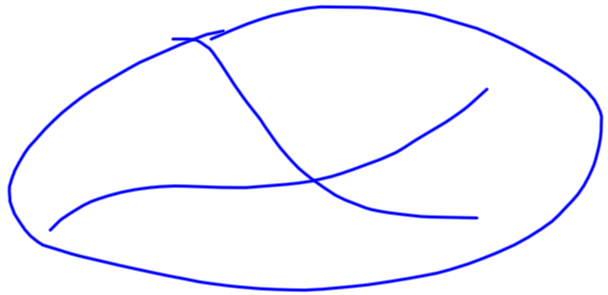
Wellengl

schw. Saite

$n=1$



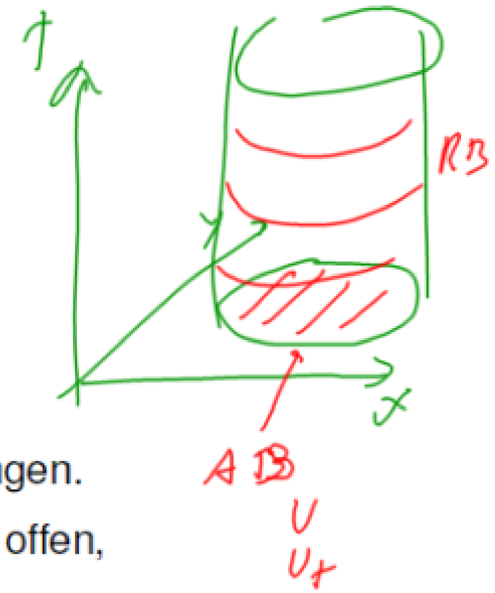
$n=2$



$n=3$ elast. Medi

$n>3$

Kapitel 6: Die Wellengleichung



In diesem Kapitel untersuchen wir die **Wellengleichung**

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

sowie die **inhomogene Wellengleichung** der Form

$$u_{tt} - \Delta u = f$$

in Verbindung mit geeigneten Anfangs– und Randbedingungen.

Hier bezeichnet $t > 0$ die Zeitvariable und $x \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, die Ortsvariable.

Wir suchen also eine Funktion $u : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $u = u(\mathrm{x}, t)$, wobei der Laplace–Operator auf die Ortsvariable $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ wirkt.

Für die inhomogene Gleichung bezeichnet die rechte Seite eine gegebene Funktion $f : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

so erhalten wir eine Transportgleichung mit kostanten Koeffizienten:

$$v_t(x,t) + v_x(x,t) = 0$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$v(x,t) = a(x-t) \qquad V_t + V_x = -a'(\ ) + a'(\ ) = 0$$

und erfüllt die Anfangsbedingung

$$v(x,0) = a(x)$$

Wegen

$$v(x,t) := \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t)$$

ist $u(x,t)$ demnach die Lösung der **inhomogenen** Transportgleichung

$$u_t - u_x = a(x-t)$$

$$u_p = \int_0^t a(x+t-2s)\,ds$$

$$u_{pt} - u_{px} = \cancel{\int a'(\ )\,ds} - \cancel{\int a'(\ )\,ds} + a(x+t-2t) =$$

$$= a(x-t)$$

Nach den Methoden aus Kapitel 2 erhalten wir

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_0^t a(x+(t-s)-s)ds + u(x+t,0) \\
&= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)dy + u(x+t,0) \\
&= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)dy + g(x+t)
\end{aligned}
$$

$y = x + t - 2s$
$dy = -2\,ds$
$[0,t] \to [x+t, x-t]$

1. AB

Diese Lösung soll nun noch die Anfangsbedingung

$$u_t(x,0) = h(x)$$

erfüllen.

Beispiel zur Formel von d'Alembert:

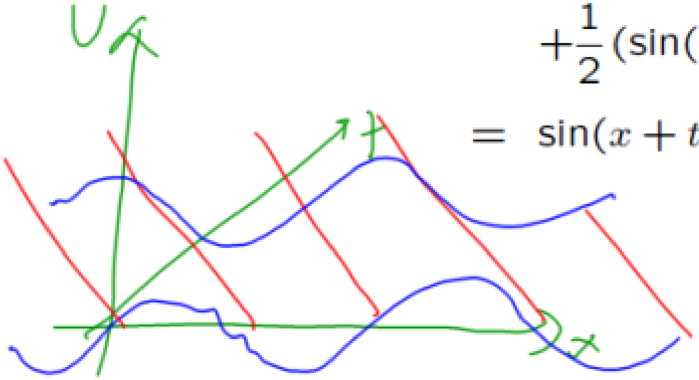
Wir betrachten das Cauchy–Problem

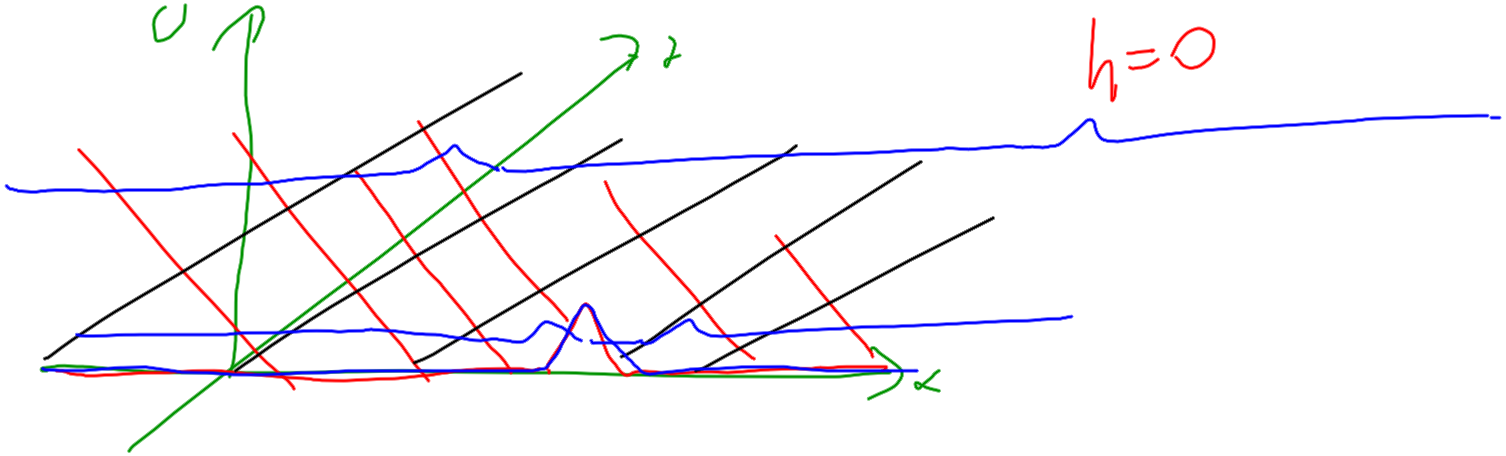
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u = \sin x, u_t = \cos x & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Nach der Formel von d'Alembert ergibt sich:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}(\sin(x+t) + \sin(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \cos(y)dy \\ &= \frac{1}{2}(\sin(x+t) + \sin(x-t)) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\sin(x+t) - \sin(x-t)) \\ &= \sin(x+t) \end{aligned}$$

Konst entlang von $x = -t + x_0$





$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(x-t)\right)$$

Konstant entlang

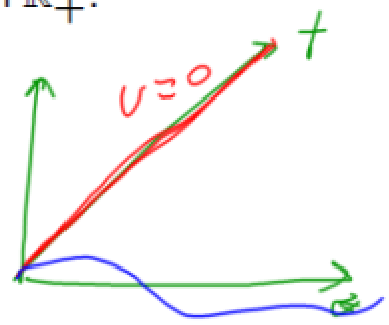
$x = -t + x_0$

$x = t + x_0$

Die Reflektionsmethode für den Halbraum $\mathbb{R}_+ = \{x > 0\}$:

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem auf dem Halbraum $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ u = g, \ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times (0, \infty) \end{cases}$$



mit vorgegebenen Funktionen g und h mit $g(0) = h(0) = 0$.

Idee:

Erweitere das Halbraumproblem auf ein Ganzraumproblem und verwende die Formel von d' Alembert.

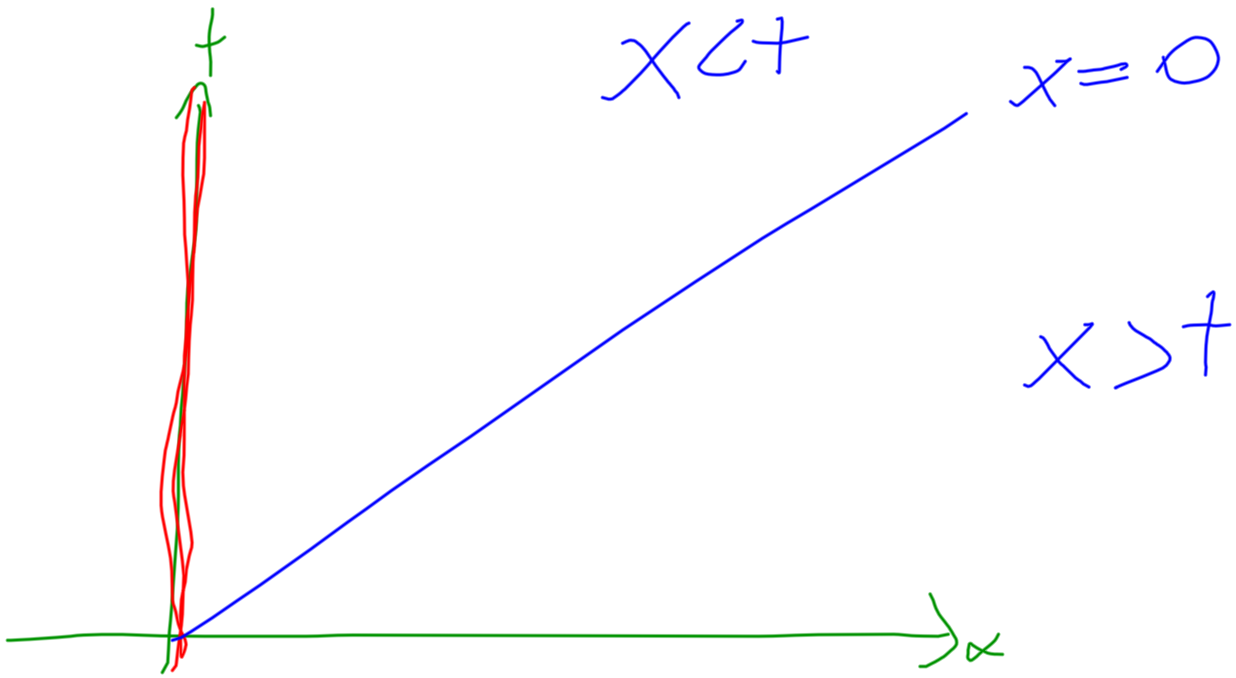
Definiere eine Funktion $\tilde{u}(x, t)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ durch

$$\tilde{u}(x, t) := \begin{cases} u(x, t) & (x \geq 0, t \geq 0) \\ -u(-x, t) & (x \leq 0, t \geq 0) \end{cases}$$

$$\int_{-t}^{t} \tilde{h}(y)\,dy = \int_{-t}^{0} \underbrace{\tilde{h}(y)}_{-h(-y)}\,dy + \int_{0}^{t} \underbrace{\tilde{h}(y)}_{h(y)}\,dy$$

$$= +\int_{t}^{0} h(y)\,dy + \int_{0}^{t}$$

$$= -\int_{0}^{t} h(y)\,dy + \int_{0}^{t} h(y)\,dy = 0$$



$$\tilde{g}(x-t) = \begin{cases} g(x-t) & x>t \\ -g(t-x) & x<t \end{cases}$$

Für $x \geq 0$ haben wir gerade die Lösung des Ausgangsproblems, i.e.

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t)$$

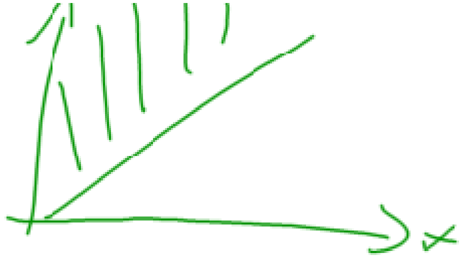
Fallunterscheidung:

1) Ist $x \geq t \geq 0$, so folgt $x - t \geq 0$ und daher

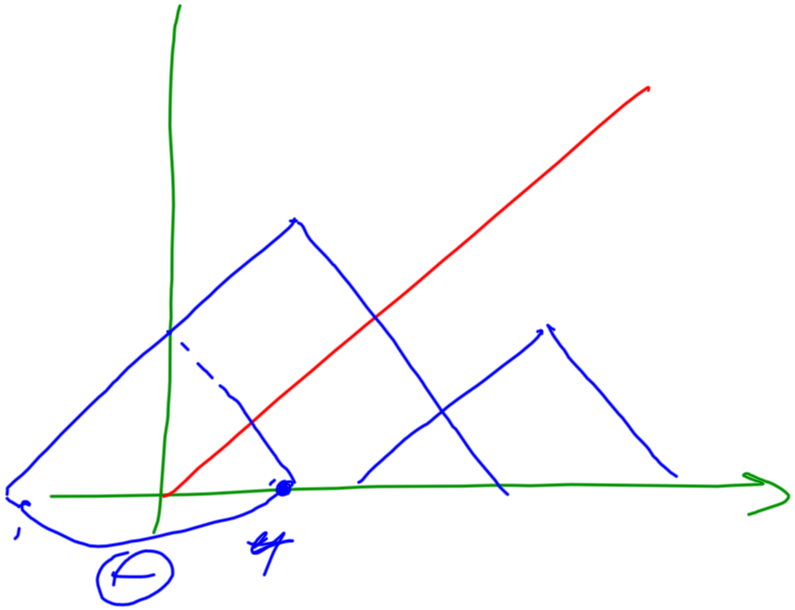
$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)dy \\ &= \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy \end{aligned}$$

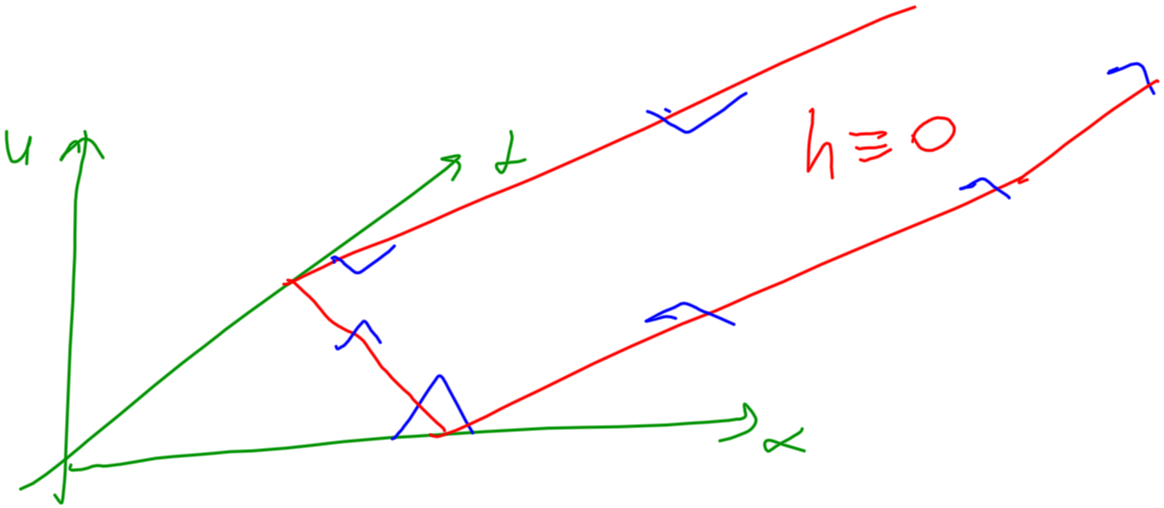
denn für positive Argumente stimmen die Funktionen g und $\tilde{g}$ beziehungsweise h und $\tilde{h}$ überein.

2) Ist $0 \leq x \leq t$, so folgt $x - t \leq 0$ und daher



$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}(\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)dy \\
&= \frac{1}{2}(g(x+t) - g(-(x-t))) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{0} \tilde{h}(y)dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{x+t} \tilde{h}(y)dy \\
&= \frac{1}{2}(g(x+t) - g(t-x)) - \frac{1}{2}\int_{0}^{t-x} h(y)dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{x+t} h(y)dy \\
&= \frac{1}{2}(g(x+t) - g(t-x)) + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{x+t} h(y)dy
\end{aligned}
$$




u
t
x
h ≡ 0

Technomathematik Master

Uni HH + TU HH

Dep. Math Uni HH

Studium

Technomat.