V10 DGL II 16.6.10

$$u_{tt} = \Delta u$$

ρ dichte

v Geschwindigkeit

$\boxed{p = R\rho T_0}$ Druck

isotherm

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) + \nabla p = 0$$

Eulergl. Gasdynamik

$$\rho(x,t) = \rho_0 + \varepsilon \rho_1(x,t)$$

$$v(x,t) = \varepsilon v_1(x,t)$$

$$\cancel{\rho_{0t}} + \varepsilon \rho_{1t} + \rho_0 \varepsilon \operatorname{div} u_1 + \varepsilon u_1 \cancel{\nabla \rho_0} + \cancel{O(\varepsilon^2)} = 0$$

$$\rho_0 \varepsilon u_{1t} + \cancel{\rho_0 \varepsilon^2 \ldots} + \cancel{RT_0 \nabla \rho_0} + RT_0 \varepsilon \nabla \rho_1 + \cancel{O(\varepsilon^2)} = 0$$

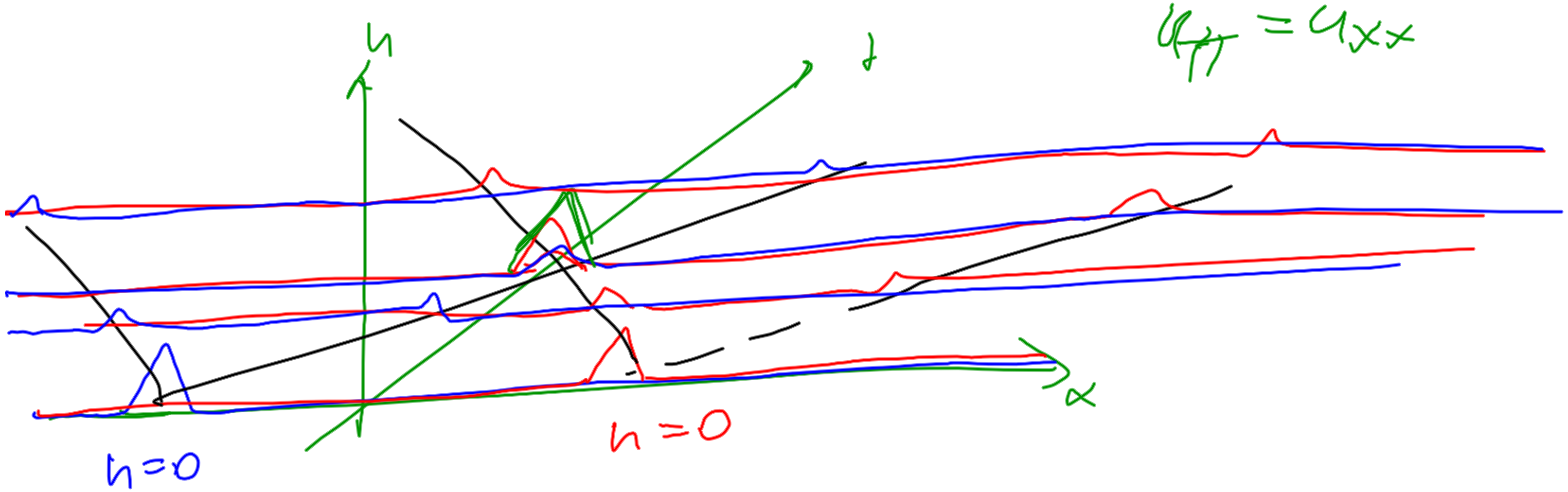
/ höhere Ordnung

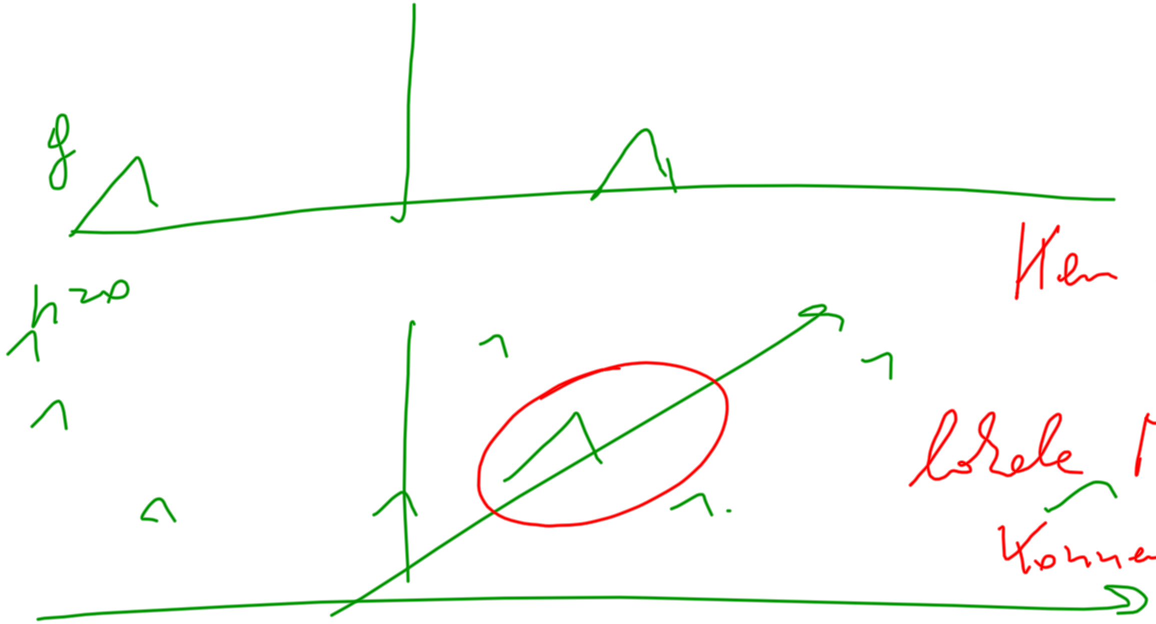
$$\left.\begin{aligned} \rho_{1t} &= -\rho_0 \operatorname{div} u_1 \\ \rho_0 u_{1t} &= -RT_0 \nabla \rho_1 \end{aligned}\right\}$$

$$\rho_{1tt} = -\rho_0 \operatorname{div}(u_{1t}) = +\frac{\cancel{\rho_0}}{\cancel{\rho_0}} RT_0 \operatorname{div}(\nabla \rho_1) =$$

$$\boxed{\rho_{1tt} = RT_0 \Delta \rho_1}$$

$$u_{tt} = u_{xx}$$

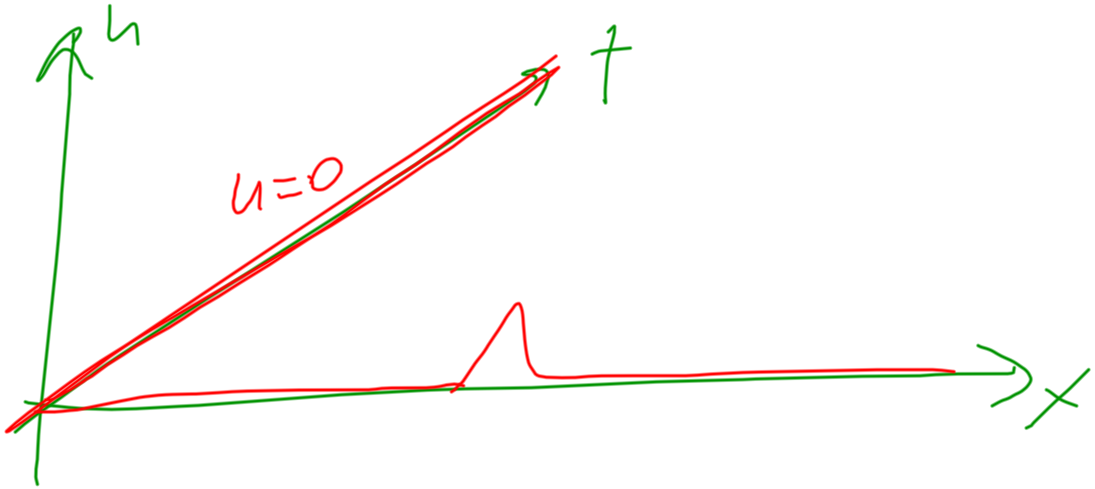




Kein Maximumprinzip

lokale Maxima können auftreten

Halfraum problem



Beweis: (Fortsetzung)

Da u eine Lösung der Wellengleichung ist, folgt

$$U_r(x;r,t) = \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} u_{tt}(y,t)\,dy = \frac{r}{n} \frac{1}{n\alpha(n) r^n} \int_{B(x,r)}$$

und damit

$$r^{n-1} U_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{B(x,r)} u_{tt}\,dy = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_0^r \int_{\partial B(x,r)} dS\,dr$$

Daraus folgt aber

$$(r^{n-1} U_r)_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(x,r)} u_{tt} dS = r^{n-1} \fint_{\partial B(x,r)} u_{tt} dS = r^{n-1} U_{tt}$$

Fassen wir dieses Ergebnis zusammen, so löst U in der Tat die Gleichung

$$U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r = 0$$

$$(\partial_t - \partial_r)(\partial_t + \partial_r)\,U = 0$$

Die Kirchhoffsche Formel für $n = 3$:

Die Lösung des Anfangswertproblems für die Wellengleichung lautet:

$$u(x,t) = \fint_{\partial B(x,t)} \left(th(y) + g(y) + Dg(y) \cdot (y - x) \right) dS(y) \quad (x \in \mathbb{R}^3, t > 0)$$

Herleitung über die Euler–Poisson–Darboux Gleichung:

Wir definieren

$$\begin{aligned} \tilde{U} &:= rU \\ \tilde{G} &:= rG, \quad \tilde{H} := rH \end{aligned}$$

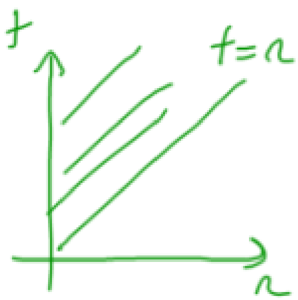
Dann gilt

$$\tilde{U}_{tt} = rU_{tt} = r\left(U_{rr} + \frac{2}{r}U_r\right) = rU_{rr} + 2U_r = (U + rU_r)_r = \tilde{U}_{rr}$$

nur für n=3 möglich

Also löst $\tilde{U}$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty) \\ \tilde{U} = \tilde{G},\ \tilde{U}_t = \tilde{H} & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ \tilde{U} = 0 & \text{auf } \{r = 0\} \times \{t = 0\} \end{cases}$$



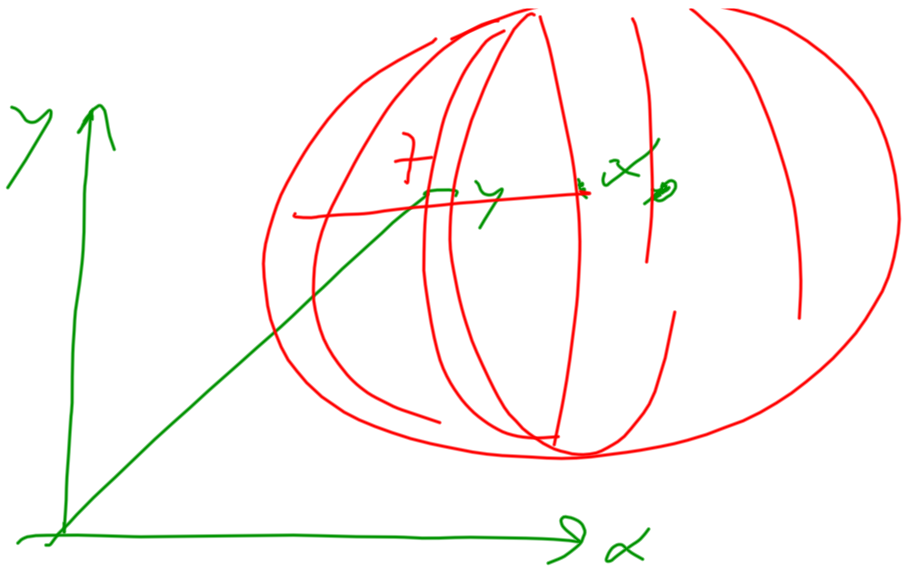
Mit der Lösungsformel für das Halbraumproblem folgt für $0 \leq r \leq t$ die Darstellung

$$\tilde{U}(x;r,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)\right] + \frac{1}{2}\int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y)dy$$

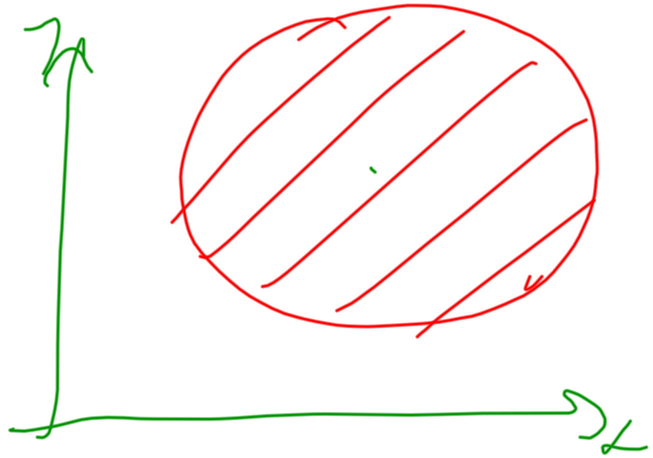
Da $U(x;r,t)$ aus $u(x,t)$ durch spärische Mittelung entsteht, gilt

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0} U(x;r,t)$$

$n=3!$



$n=2$

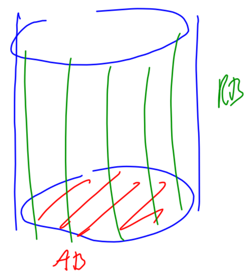


Energiemethode

$$u_{tt} = u_{xx} + f \quad U \times (0,\infty)$$

$$\left.\begin{aligned} u &= g \\ u_t &= h \end{aligned}\right\} t = 0$$

$u = i$ auf Mantel



Eindeutig?

Annahme u_1, u_2 Lsg. $\quad w = u_1 - u_2$

$$w_{tt} = w_{xx}$$

$$\left.\begin{aligned} w &= 0 \\ w_t &= 0 \end{aligned}\right\} t = 0$$

$w = 0$ Mantel

$u = 0$ ist einzige Lsg.

$$e(t) = \int_U (w_t^2 + w_x^2)\,dx$$

$$\dot e(t) = \int_U \left(2 w_t w_{tt} + 2 w_x u_{xt}\right) dx =$$

$$= 2 \int_U \underbrace{\left(w_t w_{tt} - w_{xx} w_t\right)}_{w_t(\underbrace{w_{tt} - w_{xx}}_{=0})} dx + \cancel{\int_{\partial U} w_x \underbrace{w_t}_{=0}} = 0$$

auf Mantel

$$\dot e(t) = 0$$

$$e(t) = e(0) = \int_U \left(\underbrace{w_t^2}_{=0} + \underbrace{w_x^2}_{=0}\right) dx \Big|_{t=0} = 0$$

$$0 \le e(t) = 0 \qquad e(t) = 0 \quad \forall t$$

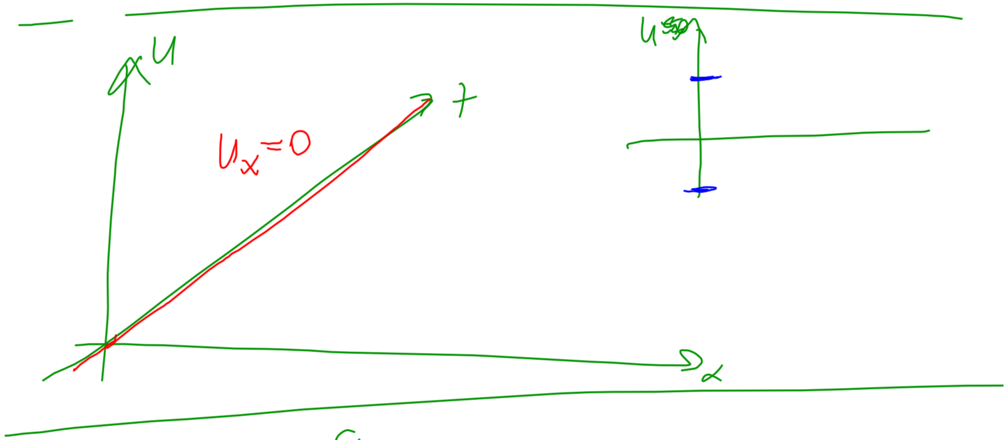
$$\Longrightarrow w_x = 0,\ w_t = 0 \quad \forall t$$

$$w = 0 \quad \forall t$$

Wellengl.

·) endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit

·) Kein Maximumprinzip !



$u_{tt} = u_{xx} + f(x,t)$

$\left.\begin{array}{l} u = 0 \\ u_t = 0 \end{array}\right\} t = 0$

$\Rightarrow$

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-s}^{x+s} f(y, \underline{\underline{t-s}})\, dy\, ds$$

retardiertes Potential