Vo Dgl II 23.6.10

	Laplace	Wärmeltg	Wellen gl
Glättung	✓	✓	✗
Mittelwerteigensch.	✓	✓	✗
Maximump.	✓	✓	✗
Eindeutigk (AWRP)	✓	✓	✓
Energieim.	✓	✓	✓
endl. Ausbreitungsgeschw.		✗	✓

bisher: Keine Existenzresultate

(außer bei expliziten Lösungsformeln)

meist Eindeutigkeit

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

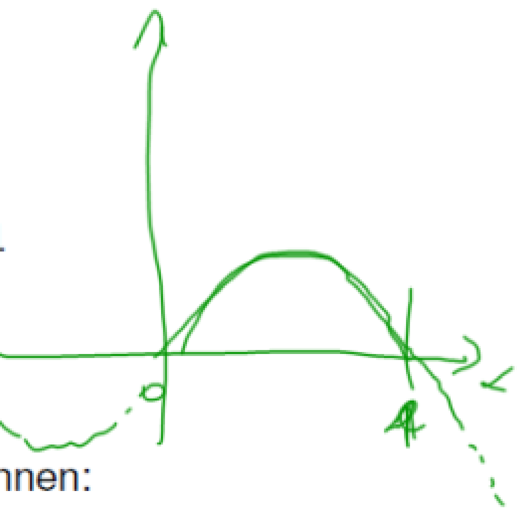
$$\left| \sin\frac{n\pi x}{l} \right| \int_0^l$$

$$\int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{m\pi x}{l}\, dx = \begin{cases} e_n & n = m \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^l f_N(x) \sin\frac{n\pi x}{l}\, dx = e_n c_n$$

Beispiel:

Wir betrachten das Randwertproblem



$$
\begin{aligned}
-\frac{d^2u}{dx^2} &= x, \quad 0 < x < 1 \\
u(0) &= 0 \\
u(1) &= 0
\end{aligned}
$$

Die exakte Lösung läßt sich durch **Integration** berechnen:

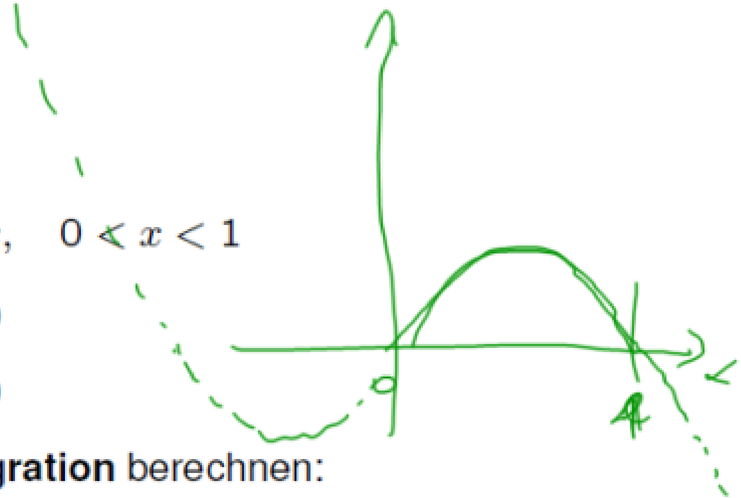
$$u'(x) = -\frac{x^2}{2} + a \quad \Rightarrow \quad u(x) = -\frac{x^3}{6} + ax + b$$

Mit den Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ folgt:

$$u(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{1}{6}x = \frac{1}{6}x(1 - x^2) = \frac{1}{6}x(1-x)(1+x)$$

Beispiel:

Wir betrachten das Randwertproblem



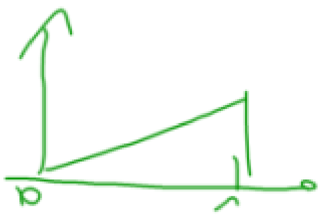
$$
\begin{aligned}
-\frac{d^2u}{dx^2} &= x, \quad 0 < x < 1 \\
u(0) &= 0 \\
u(1) &= 0
\end{aligned}
$$

Die exakte Lösung läßt sich durch **Integration** berechnen:

$$u'(x) = -\frac{x^2}{2} + a \quad \Rightarrow \quad u(x) = -\frac{x^3}{6} + ax + b$$

Mit den Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ folgt:

$$u(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{1}{6}x = \frac{1}{6}x(1 - x^2) = \frac{1}{6}x(1-x)(1+x)$$



$$-T\, u_{xx} = f(x),$$

$$u(0) = h$$

$$u(\ell) = K$$

$$v(x) = u(x) - \left(h\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + K\frac{x}{\ell} \right)$$

$$v(0) = u(0) - h = h - h = 0$$

$$v(\ell) = u(\ell) - K = K - K = 0$$

$$\boxed{-T v_{xx} = -T u_{xx} = f(x)}$$

$$v(0) = 0$$

$$v(\ell) = 0$$

AB $\left\| \begin{aligned} u_t - u_{xx} &= f(x,t) \\ u(x,0) &= g(x) \end{aligned} \right.$

RB $\boxed{\cancel{u(0,t) = u(\ell,t) = 0}}$

$$\left\| \begin{aligned} u(0,t) &= h(t) \\ u(\ell,t) &= k(t) \end{aligned} \right.$$

$$v(x,t) = u(x,t) - \left(h(t)\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + k(t)\frac{x}{\ell}\right)$$

$$v(0,t) = h(t) - h(t) = 0$$

$$v(\ell,t) = k(t) - k(t) = 0$$

$$v(x,0) = \underbrace{u(x,0)}_{g(x)} - \left(h(0)\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + k(0)\frac{x}{\ell}\right) =: \tilde{g}(x)$$

$$v_t - v_{xx} = u_t - u_{xx} - \left(h'\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + k'\left(\frac{x}{\ell}\right)\right) =$$

$$= f(x,t) - \left(h'(t)\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + k'(t)\frac{x}{\ell}\right) = \tilde{f}(x,t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= \tilde{f}(x,t) \\ v(x,0) &= \tilde{g}(x) \\ v(0,t) = v(\ell,t) &= 0 \end{aligned}}$$

die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n}{dt}(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\
\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\frac{n\pi}{l} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= -\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\frac{n^2\pi^2}{l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$u_t - u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{\left(\frac{da_n}{dt}(t) + a_n(t)\frac{n^2\pi^2}{l^2}\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = (*)$$

und wir erhalten durch Gleichsetzen mit der Fourier–Reihe von $f(x,t)$

$$(*) = f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{c_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

136

ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form

$$\boxed{\frac{da_n}{dt}(t) + a_n(t)\frac{n^2\pi^2}{l^2} = c_n(t) \qquad n = 1, 2, \ldots, \infty}$$

Die Anfangsbedingungen $a_1(0), a_2(0), \ldots$ ergeben sich aus der Anfangsbedingung $u(x,0) = g(x)$:

$$u(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

und daher

$$\boxed{a_n(0) = b_n, \quad n = 1, 2, \ldots}$$

Damit haben wir ein Anfangswertproblem für ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen, das zudem entkoppelt ist.

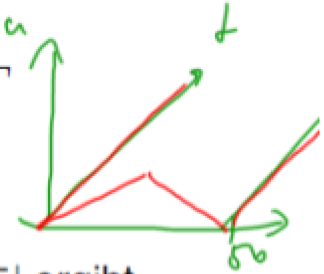
Die Lösung läßt sich also direkt angeben:

$$a_n(t) = b_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\cdot t\right) + \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\cdot (t-s)\right) c_n(s)\, ds$$

Beispiel:

Wir betrachten das homogene Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : \ 0 < x < 50,\ 0 < t \le T \\ u(x,0) = 5 - \frac{1}{5}|x-25| & : \ 0 \le x \le 50 \\ u(0,t) = u(50,t) = 0 & : \ 0 \le t \le T \end{cases}$$



Die Berechnung der Fourier–Koeffizienten von $g(x) = 5 - \frac{1}{5}|x-25|$ ergibt

$$b_n = \frac{1}{25}\int\limits_0^{50} \left(5 - \frac{1}{5}|x-25|\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right) dx = \frac{40}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Da wir eine homogene Wärmeleitungsgleichung betrachten, folgt

$$a_n(t) = \frac{40}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{2500} \cdot t\right)$$

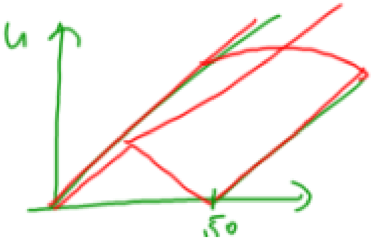
und die Lösung als Fourier–Reihe lautet

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \underbrace{\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{2500} \cdot t\right)}_{\xrightarrow[t\to\infty]{} 0} \sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right) \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

Beobachtung:

1) Für festes $T > 0$ fallen die Fourier–Koeffizienten $a_n(t)$ der Lösung exponentiell schnell für $n \to \infty$ ab. Höhere Werte für n beschreiben gerade die höheren Frequenzen in der Lösung.

2) Für festes n fallen die Fourier–Koeffizienten exponentiell schnell für $t \to \infty$ ab. Der Abfall ist umso schneller, je größer n ist. Für große Zeiten beschreiben also wenige Terme der Fourier–Reihe die exakte Lösung sehr gut.



Beispiel:

Wir betrachten das inhomogene Anfangsrandwertproblem

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t - u_{xx} & = & x & : \; 0 < x < 1,\, 0 < t \leq T \\ u(x,0) & = & 0 & : \; 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) & = & u(1,t) = 0 & : \; 0 \leq t \leq T \end{array}\right.$$

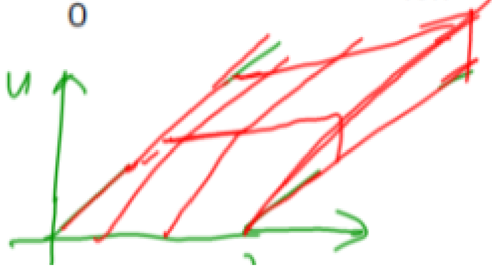
Dann gilt mit den Bezeichnungen von oben

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \\ c_n(t) &= c_n = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \end{aligned}$$

und damit

$$a_n(t) = 2\int_0^t e^{-n^2\pi^2(t-s)}\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\,ds = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}\left(1 - e^{-n^2\pi^2 t}\right)$$

$\downarrow t \to \infty$



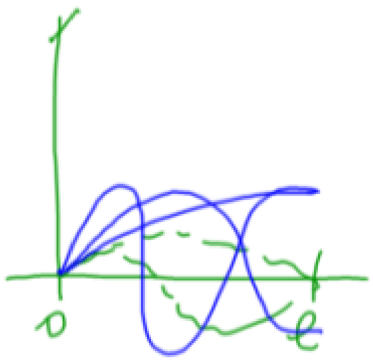
$$2\frac{(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}$$

Die Fourier–Reihe

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

kann **keine** Lösung sein, denn unabhängig von den (zeitabhängigen) Koeffizienten gilt dann stets

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$



Die im Problem vorgegebenen Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \qquad u_x(l,t) = 0$$

werden zum Beispiel durch die Funktion

$$u(x,t) = \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$$

erfüllt.

Mit dem Lösungsansatz

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right)$$

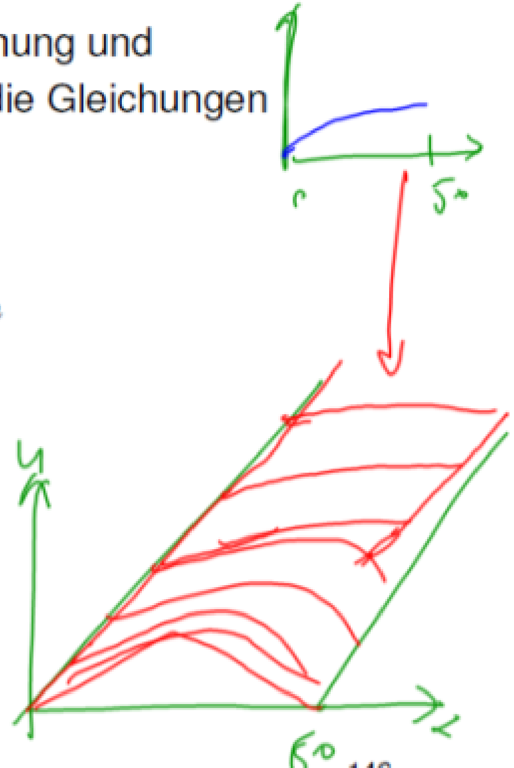
erhalten wir durch Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung und Koeffizientenvergleich mit der Fourier–Reihe von $g(x)$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{da_n}{dt} + \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4 \cdot 50^2} a_n &= 0 \\ a_n(0) &= b_n \end{aligned}$$

$n = 1, 2, \ldots$.

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet dann

$$a_n(t) = b_n e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{10000}t}$$



146