Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2011**
Prof. Dr. H.J. Oberle
Dr. P. Kiani

Differentialgleichungen II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 3

Aufgabe 1:

a) Gegeben sei die Aufgabe

$$\begin{cases} u_t + u \cdot u_x = 0 & x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

mit einer differenzierbaren Funktion u_0 . Es gelte

$$u_0'(x_m) \;:=\; \min\{\, u_0'(x) \;:\; x \in \mathbb{R} \,\} \;<\; 0\,.$$

Zeigen Sie, dass die Lösung höchstens für

$$t \in \left[0,\ \frac{-1}{u_0'(x_m)}\right]$$

eindeutig sein kann.

b) Zeichnen Sie die Charakteristiken für die Burgersgleichung $u_t + uu_x = 0$ versehen mit den Anfangswerten

(i)

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le 1 \\ 2 & 1 < x \end{cases}$$

(ii)

$$u(x,0) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le 2 \\ 0 & 2 < x\,. \end{cases}$$

Welche Probleme ergeben sich?

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Typen folgender Differentialgleichungen in jedem Punkt der $(x, y)-$ Ebene.

a) $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} + u_x = \cos(y)e^{-x}$

b) $2u_{xx} + u_{xy} + xu_x = u$

c) $3u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} = 0$

d) $u_{xx} + e^x u_{yy} + \sin(x)(u_x + u_y) = y + x$

e) $u_{xx} + 2(x - y)u_{xy} + (x^2 + y^2)u_{yy} = 0$

Aufgabe 3: Gegeben ist die Differentialgleichung

$$2u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{yy} + \sqrt{2}(u_x + u_y) \;=\; 0\,.$$

a) Bestimmen Sie den Typ der Differentialgleichung.

b) Transformieren Sie die Differentialgleichung auf ihre Normalform.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der transformierten Differentialgleichung und führen Sie die Rücktransformation durch.

Aufgabe 4:
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_{xt} - 2u_{xx} &= \sin(t) \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= \cos(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= -4\sin(x). \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Transformieren Sie die Differentialgleichung zunächst auf die integrable Normalform (vgl. 3.12, 3.13 Vorlesung).

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der transformierten Differentialgleichung.

c) Führen Sie die Rücktransformation durch und lösen Sie die Anfangswertaufgabe.

Abgabetermin: 10.05.11