Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2011**
Prof. Dr. H.J. Oberle
Dr. P. Kiani

Differentialgleichungen II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4

Aufgabe 1:

a) Gegeben ist der 2-dimensionale vertikale Schnitt $R := [0, 4] \times [0, 2.5]$ eines Zimmers, mit einem Fenster $F := \{(0, y) \,:\, y \in [1, 2]\}$ und einer Heizung $H := \{(0, y) \,:\, y \in [0, 1]\}$. Wir bezeichnen mit $u(x, y)$ die Temperatur am Ort (x, y). Dann gilt im stationären Zustand $\Delta\, u = 0$. Stellen Sie die Randbedingungen für die Laplace Gleichung unter folgenden Annahmen auf.

- Das Fenster befindet sich auf der konstanten (Außen-)Temperatur $u_A = 12$.
- Die Heizung befindet sich auf der konstanten Temperatur $u_H = 50$.
- Die Decke zum nächsten Geschoß ist so gut isoliert, dass man annehmen kann, dass es keinen Wärmestrom durch die Decke gibt.
- Die Wände und der Boden sind dagegen nicht total isolierend. Der Wärmeverlust durch diese Bauteile wird als proportional zu $u - u_A$ angenommen.

b) Sei u eine harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^2$, mit

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \qquad \text{für} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 < 9, \\ u(x, y) &= x^2 - y^2 + 2011 \qquad \text{für} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie den Wert von u im Punkt $(1, 2)^T$ ohne die Lösung zu berechnen.
Hinweis: $\cos(2\phi) = \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)$.

Aufgabe 2:

Lösen Sie das folgende Dirichletproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \qquad x \in (0, 2),\, y \in (0, 1), \\ u(x, 0) &= 2 - x + \sin(\pi x), \\ u(x, 1) &= 0, \\ u(0, y) &= 2 - 2y + 3\sin(3\pi y), \\ u(2, y) &= 0. \end{aligned}$$

Hinweis: Führen Sie eine bilineare Funktion $u_E(x, y) := a + bx + cy + dxy$ *ein, die die Randwerte in den Ecken* $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 0)$ *interpoliert, und schreiben Sie das Problem um in ein Problem für* $v(x, y) = u(x, y) - u_E(x, y)$.

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie alle rotationssymmetrischen (also in Polarkoordinaten: $\phi-$ unabhängigen) Lösungen der folgenden Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta(u) &= -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{für } 1 < x^2+y^2 < 9, \\ u(x,y) &= 1 \quad \text{auf } x^2+y^2 = 1, \\ u(x,y) &= 2 \quad \text{auf } x^2+y^2 = 9. \end{aligned}$$

Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten und einen geeigneten Produktansatz!

b) Bestimmen Sie eine Lösung der folgenden Aufgabe

$$\begin{aligned} \Delta(u) &= 0 \quad \text{für } 0 \le x^2+y^2 < 9, \\ u(x,y) &= \frac{x}{9}\,(x-y) \quad \text{auf } x^2+y^2 = 9\,. \end{aligned}$$

Hinweise: Die Lösung ist NICHT rotationssymmetrisch! Sie können die Lösungsdarstellung aus der Vorlesung verwenden. Es gilt
$\cos(2\phi) = 2\cos^2(\phi) - 1$, $\sin(2\phi) = 2\sin(\phi)\cos(\phi)$.

Aufgabe 4:

Sei K der Kreisringsektor $K := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 < x^2+y^2 < 9,\ x > 0,\ y > 0\}$ und (r,φ) wie üblich die Polarkoordinatendarstellung von $(x,y)^T$.

Lösen Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad \text{auf } K \\ u &= \begin{cases} \varphi\,(\frac{\pi}{2}-\varphi) & r = 3 \\ 0 & \text{auf dem Rest von } \partial K \end{cases} \end{aligned}$$

mit Hilfe eines geeigneten Produktansatzes, und berechnen Sie alle Extrema von u auf $\bar{K}$.

Abgabetermine: 24.05.11