**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **SoSe 2011**
Prof. Dr. H.J. Oberle
Dr. P. Kiani

# Differentialgleichungen II
# für Studierende der Ingenieurwissenschaften
## Blatt 5

**Aufgabe 1:**

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\tilde{u}(x,t) = \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_0^t \int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} h(\omega,\tau)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau$

die inhomogene Anfangswertaufgabe

$\tilde{u}_{tt} - c^2\tilde{u}_{xx} = h(x,t) \qquad \tilde{u}(x,0) = \tilde{u}_t(x,0) = 0$

löst.

b) Berechnen Sie eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 6x\sin t, & x\in\mathbb{R},\ t>0 \\ u(x,0) &= x,\ x\in\mathbb{R}, \qquad u_t(x,0) = \sin(x),\ x\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

und bestätigen Sie die Lösung durch Einsetzen in die Anfangswertaufgabe.

*Hinweis:* Man bestimmt eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit homogenen Anfangswerten, löst die homogene Differentialgleichung mit den inhomogenen Anfangswerten und verwendet das Superpositionsprinzip.

**Aufgabe 2:** (Anschlagen einer Saite)

Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} && \text{für} \quad 0<x<1,\ t>0, \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 && \text{für} \quad t>0, \\ u(x,0) &= 0 && \text{für} \quad 0<x<1, \\ u_t(x,0) &= \begin{cases} 1, & \frac{1}{20} \le x \le \frac{1}{10}, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \end{aligned}$$

mit Hilfe eines geeigneten Produktansatzes.
Als Lösung erhalten Sie eine Fourierreihe. Plotten Sie die Partialsummen der ersten 20 nicht verschwindenden Summanden dieser Reihe für $c = 2$, $x \in [0,1]$ und $t \in [0, 0.4]$ bzw. $t \in [0,2]$.

Wie müssen die Anfangsdaten fortgesetzt werden, um die Formel von d'Alembert anwenden zu können? Welche Lösungsdarstellung erhalten Sie mit dieser Formel?

Zusatzaufgabe: Die Lösung nach d'Alembert können Sie plotten, indem Sie das auftretende Integral numerisch berechnen. Da der Integrand stückweise konstant ist, ist das Ergebnis der numerischen Integration (z.B. mit der Mittelpunktsregel) bei geeigneter Wahl der Schrittweiten und Stützstellen exakt.

**Aufgabe 3:** [Klausur 2006, Oberle/Kiani]

Bestimmen Sie mit Hilfe der Fourier–Methode die Lösungen der folgenden Anfangsrandwertaufgaben.

a)

$$\begin{aligned} v_{tt} &= 4v_{xx} && 0 < x < 1,\ t \in \mathbb{R}^+, \\ v(x,0) &= -\sin(\pi x) && 0 < x < 1\,, \\ v_t(x,0) &= \sin(2\pi x) && 0 < x < 1\,, \\ v(0,t) = v(1,t) &= 0 && t > 0. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx} && 0 < x < 1,\ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= x - \sin(\pi x) && 0 < x < 1\,, \\ u_t(x,0) &= \sin(2\pi x) && 0 < x < 1\,, \\ u(0,t) &= 0 && t > 0\,, \\ u(1,t) &= 1 && t > 0\,. \end{aligned}$$

**Aufgabe 4:**

a) Bestimmen Sie eine rotationssymmetrische Lösung $u(\boldsymbol{x}, t) = \tilde{u}(r,t)$ der folgenden Anfangswertaufgabe:

$$u_{tt} = c^2 \Delta_3 u, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3,\ r = \|\boldsymbol{x}\|_2,\ t > 0,$$

$$u(\boldsymbol{x}, 0) = \frac{1}{r+1}, \qquad u_t(\boldsymbol{x}, 0) = 0\,.$$

*Hinweis:* Beachten Sie, dass $r\tilde{u}(r,t)$ nach Satz 6.4 der Vorlesung die Wellengleichung im $\mathbb{R}^1$ löst und verwenden Sie die allgemeine Darstellung der Lösung der Wellengleichung.

b) Lösen Sie die folgende Anfangswertaufgabe mit Hilfe der Liouvillschen Lösungsformel (vgl. Satz 6.6 der Vorlesung).

$$u_{tt} - c^2 \Delta_3 u = 0, \qquad \boldsymbol{x} = (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3,\ t \geq 0$$

$$u(\boldsymbol{x}, 0) = y(x+y+z), \qquad u_t(\boldsymbol{x}, 0) = 0\,.$$

**Abgabetermine: 07.06.11**