**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **SoSe 2011**
Prof. Dr. H.J. Oberle
Dr. P. Kiani

# Differentialgleichungen II
# für Studierende der Ingenieurwissenschaften
## Blatt 7

**Aufgabe 1:** (Richtige Fortsetzung von Anfangsdaten bei anderen Randbedingungen)

a) Leiten Sie analog zur Vorgehensweise für das Dirichletproblem in der 7.Vorlesung für das folgende Neumann Problem eine Reihendarstellung der Lösung her.

$$\begin{array}{rcll} u_t &=& u_{xx}, & 0 < x < 1,\, t > 0, \\ u(x,0) &=& g(x), & 0 < x < 1, \\ u_x(0,t) &=& u_x(1,t) = 0 & t > 0. \end{array}$$

b) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe aus a) mit $g(x) = 1 + \cos(2\pi x)$.

**Aufgabe 2:**

Gegeben sind der Raum der reellwertigen Funktionen aus $C^2[a,b]$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$< u, v > := \int_a^b u(x) \cdot v(x) dx\,,$$

sowie der Differentialoperator $L = -\dfrac{d^2}{dx^2}$,

und die Randbedingungen $u'(a) = u(a),\ u'(b) = -u(b)$.

a) Zeigen Sie, dass der Differentialoperator bezüglich der gegebenen Funktionen symmetrisch ist, also

$$< Lu, v > = < u, Lv >$$

gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte des Differentialoperators $L$ bezüglich der gegebenen Randwerte positiv sind.

**Aufgabe 3:**

a) Sei $\lambda = \mu^2$ ein Eigenwert zu dem Differentialoperator, dem Funktionenraum und den Randbedingungen aus Aufgabe 2) mit $[a, b] = [0, 1]$. Bestimmen Sie die zugehörige Eigenfunktion und Zeigen Sie mit Hilfe der Randbedingungen, dass dann die Gleichung $\tan(\mu) = \dfrac{2\mu}{\mu^2 - 1}$ gilt.

b) Die Gleichung $\tan(\mu) = \dfrac{2\mu}{\mu^2 - 1}$ hat in jedem Intervall $(k\pi,\, k\pi + \frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ genau eine Lösung. Sei $v_k(x)$ die zugehörige Eigenfunktion. Wie sieht dann eine Reihendarstellung der Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t = c^2 u_{xx}, &\qquad x \in (0,1),\\ u(x,0) = f(x), &\qquad x \in [0,1],\\ u_x(0,t) = u(0,t),\ u_x(1,t) = -u(1,t) &\qquad t > 0, \end{aligned}$$

aus?

**Aufgabe 4:** (Vgl. Ansorge, Oberle, Band II)
*Damit Sie nicht auf die Idee kommen, dass man alles mit einfachen Produktansätzen lösen kann.*

Am Anfangsort $x = 0$ eines sehr langen Übertragungskabels werde ein Signal der periodischen Spannung

$$U(0,t) \;=\; U_0 \cos(\omega t) \qquad t \geq 0$$

eingespeist. Gesucht wird die Signalspannung $U(x,t)$ des Ausgangssignals für $x > 0, t > 0$. Man erhält $U$ als Lösung der sogenannten Telegraphengleichung

$$U_{tt} \;-\; c^2 U_{xx} \;+\; (\alpha + \beta) U_t \;+\; \alpha\beta U \;=\; 0\,.$$

Dabei sind $\alpha, \beta, c$ konstruktionsbedingte positive Kenngrößen des Problems. Ein zeitlich periodisches Eingangssignal lässt nach einer gewissen Einschwingphase ein zeitlich periodisches Ausgangssignal erwarten. Außerdem fordert man

$$U(x,t) \quad \text{beschränkt für} \quad x \to \infty\,.$$

a) Zeigen Sie, dass der Produktansatz $U(x,t) = w(x) \cdot v(t)$ hier nicht zum Erfolg führt!

b) Versuchen Sie es mit einem Lösungsansatz, der eine örtliche Dämpfung mit einem zeitlich periodischen Verlauf verbindet und eine lineare ortsabhängige Phasenverschiebung zulässt. Wählen Sie exemplarisch $\alpha = \beta = c = 1$.

**Abgabetermine: 12.07.11**

*Ende !*

*Das Mathe IV Team wünscht Ihnen viel Erfolg im Studium*

*und alles Gute für Ihre Zukunft!*