Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ der folgenden Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t + \frac{x}{t+1} u_x &= \frac{u-1}{t+1} \qquad && x \in \mathbb{R}\,, t > 0\,, \\ u(x,0) &= 1 + e^x && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

b) Lösen Sie die folgende Randwertaufgabe für einen Kreisring

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0\,, \qquad && x, y \in \mathbb{R}\,, 1 < x^2 + y^2 < 16\,, \\ u(x,y) &= 0\,, && x^2 + y^2 = 1\,, \\ u(x,y) &= x^2 - y^2\,, && x^2 + y^2 = 16\,. \end{aligned}$$

Geben Sie die Lösung auch in kartesischen Koordinaten an.

Hinweis: $\cos(2\phi) = \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)$.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die folgende Anfangsrandwertaufgabe für $u = u(x,t)$:

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= e^{-t}\left(1 - \frac{x}{3}\right) \qquad && x \in (0,\,3),\; t > 0, \\ u(x,0) &= 1 + 2\sin(\pi x) && x \in [0,3], \\ u_t(x,0) &= \frac{x}{3} && x \in (0,3], \\ u(0,t) &= e^{-t} && t \geq 0, \\ u(3,t) &= 1 && t \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass die Homogenisierung der Randdaten gemäß

$$v = u - e^{-t} - \frac{x}{3}(1 - e^{-t})$$

zur folgenden Anfangsrandwertaufgabe für v führt:

$$\begin{aligned} v_{tt} - 4v_{xx} &= 0 \qquad && x \in (0,\,3),\; t > 0, \\ v(x,0) &= 2\sin(\pi x) && x \in [0,3], \\ v_t(x,0) &= 1 && x \in (0,3], \\ v(0,t) &= 0 && t \geq 0, \\ v(3,t) &= 0 && t \geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

b) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe (2) aus Teil a) und geben Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe (1) an.

Viel Erfolg!