Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ der folgenden Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t + \frac{x}{t+1} u_x &= \frac{u-1}{t+1} \qquad && x \in \mathbb{R}\,, t > 0\,, \\ u(x,0) &= 1 + e^x && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

b) Lösen Sie die folgende Randwertaufgabe für einen Kreisring

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0\,, && x, y \in \mathbb{R}\,,\ 1 < x^2 + y^2 < 16\,, \\ u(x,y) &= 0\,, && x^2 + y^2 = 1\,, \\ u(x,y) &= x^2 - y^2\,, && x^2 + y^2 = 16\,. \end{aligned}$$

Geben Sie die Lösung auch in kartesischen Koordinaten an.

Hinweis: $\cos(2\phi) = \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)$.

Lösung:

a)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t+1}, \qquad \frac{du}{dt} = \frac{u-1}{t+1} \qquad \Longrightarrow \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\frac{du}{u-1} = \frac{dt}{t+1} \Longrightarrow \ln|u-1| = \ln(t+1) + k \Longrightarrow u = 1 + C(t+1) \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t+1} \Longrightarrow \ln|x| = \ln(t+1) + m \Longrightarrow x = D(t+1) \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$C = f(D) \Longrightarrow \frac{u-1}{t+1} = f\left(\frac{x}{t+1}\right)$$

Anfangswerte liefern :

$$u(x,0) = 1 + f(x) = 1 + e^x \Longrightarrow u(x,t) = 1 + (t+1)e^{\frac{x}{t+1}}\,.$$

[2 Punkte]

b) Allgemeiner Ansatz bei Ringen

$$u(r,\phi) = c_0 + d_0 \ln(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k r^{-k} + d_k r^k)(a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi))$$

Wegen $u(1,\phi) = 0$ folgt $c_k a_k = -d_k a_k$ und $c_k b_k = -d_k b_k$ für $k > 0$ und $c_0 = 0$. Also

$$u(r,\phi) = d_0 \ln(r) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k a_k (r^k - r^{-k}) \cos(k\phi) + d_k b_k (r^k - r^{-k}) \sin(k\phi)) \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Die Randwerte liefern :

$$
\begin{aligned}
u(4,\phi) &= 16\,(\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)) \\
&= 16\cos(2\phi) = d_0 \ln(4) + \sum_{k=1}^{\infty} (4^k - 4^{-k})(d_k a_k \cos(k\phi) \,+\, d_k b_k \sin(k\phi)) \qquad \textbf{[1 Punkt]}
\end{aligned}
$$

Also $b_k d_k = 0$ für alle k. $a_k d_k = 0$ für $k \neq 2$ und $d_0 = 0$. **[1 Punkt]**

$$
\begin{aligned}
(4^2 - 4^{-2}) a_2 d_2 = 16 &\iff a_2 d_2 = \frac{16}{16 - \frac{1}{16}} \qquad \textbf{[1 Punkt]} \\
u(r,\phi) &= \frac{16^2}{16^2 - 1}(r^2 - r^{-2})\cos(2\phi) \qquad \textbf{[1 Punkt]} \\
\iff u(x,y) &= \frac{16^2}{16^2 - 1}\left(x^2 + y^2 - \frac{1}{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\,.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2:

Gegeben ist die folgende Anfangsrandwertaufgabe für $u = u(x,t)$:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - 4u_{xx} = e^{-t}\left(1 - \frac{x}{3}\right) && x \in (0,\,3),\, t > 0,\\
&u(x,0) = 1 + 2\sin(\pi x) && x \in [0,3],\\
&u_t(x,0) = \frac{x}{3} && x \in (0,3), \qquad (1)\\
&u(0,t) = e^{-t} && t \geq 0,\\
&u(3,t) = 1 && t \geq 0.
\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die Homogenisierung der Randdaten gemäß

$$v = u - e^{-t} - \frac{x}{3}(1 - e^{-t})$$

zur folgenden Anfangsrandwertaufgabe für v führt:

$$\begin{aligned}
&v_{tt} - 4v_{xx} = 0 && x \in (0,\,3),\, t > 0,\\
&v(x,0) = 2\sin(\pi x) && x \in [0,3],\\
&v_t(x,0) = 1 && x \in (0,3), \qquad (2)\\
&v(0,t) = 0 && t \geq 0,\\
&v(3,t) = 0 && t \geq 0.
\end{aligned}$$

b) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe (2) aus Teil a) und geben Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe (1) an.

Lösungsskizze: (4+6 Punkte)

a) Mit $v = u - e^{-t} - \frac{x}{3}(1 - e^{-t})$ gilt

$u_t = v_t - e^{-t}(1 - \frac{x}{3}), \quad u_{tt} = v_{tt} + e^{-t}(1 - \frac{x}{3}), \quad v_{xx} = u_{xx}.$ **[1 Punkt]**

Neue DGL:

$v_{tt} + e^{-t}(1 - \frac{x}{3}) - 4v_{xx} = e^{-t}(1 - \frac{x}{3}) \iff v_{tt} - 4v_{xx} = 0\,.$ **[1 Punkt]**

Neue Anfangs- und Randwerte:

$v(x,0) = u(x,0) - e^0 - \frac{x}{3}(1 - e^0) = 1 + 2\sin(\pi x) - 1 = 2\sin(\pi x),$

$v_t(x,0) = u_t(x,0) + e^0 - \frac{x}{3} \cdot e^0 = 1,$ **[1 Punkt]**

$v(0,t) = v(3,t) = 0\,.$

b) Die allgemeine Lösung des Problems ist:

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)) \cdot \sin(k\omega x) \qquad \omega = \frac{\pi}{l}\,.$$

mit $c = 2$, $\omega = \frac{\pi}{3}$. **[1 Punkt]**

Für die Koeffizienten gilt nach Vorlesung:

$$A_k = \frac{2}{3} \int_0^3 2\sin(\pi x) \sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right) dx, \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$B_k = \frac{2}{2k\pi} \int_0^3 \sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right) dx. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Die Koeffizienten A_k können direkt abgelesen werden

$A_3 = 2, \qquad A_k = 0 \quad \forall\, k \neq 3.$ **[1 Punkt]**

Für B_k erhält man:

$$B_k = \frac{2}{2k\pi} \int_0^3 \sin(\frac{k\pi}{3} x) dx \;=\; -\frac{3}{k^2\pi^2} (\cos(k\pi) - 1). \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

Damit gilt:

$$v(x,t) = 2\cos(2\pi t)\sin(\pi x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k^2\pi^2} (1-(-1)^k) \sin\left(\frac{2k\pi}{3} t\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{3} x\right).$$

[1 Punkt]

Die Lösung des ursprünglichen Problems lautet dann

$$u(x,t) = v(x,t) + e^{-t} + \frac{x}{3}(1 - e^{-t})\,.$$