Aufgabe 1:

Gegeben ist die folgende Anfangswertaufgabe für $u = u(x,t)$:

$$\begin{aligned} u_t + u^3 \cdot u_x &= 0 \qquad t \in \mathbb{R}^+,\, x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= \sqrt[3]{x} \qquad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe mit Hilfe der Charakteristikenmethode.

b) Sind die Charakteristiken Geraden? Begründen Sie bitte Ihre Antwort.

c) Skizzieren Sie die Charakteristiken durch die Punkte $(x_0, 0)$ mit $x_0 = -1,\, 0,\, 8\,.$

Aufgabe 2:

Gegeben ist die folgende Anfangsrandwertaufgabe für $u = u(x,t)$:

$$\begin{aligned} & u_t - 2u_{xx} = -2xe^{-2t} + \sin(2\pi x)\,, && x \in (0,\,2),\, t > 0\,, \\ & u(x,0) = 1 + \frac{x}{2} + 3\sin(3\pi x)\,, && x \in [0,2]\,, \\ & u(0,t) = 1, \qquad u(2,t) = 2e^{-2t}\,, && t \geq 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass die Homogenisierung der Randwerte auf folgendes Problem für eine geeignet definierte Funktion v führt:

$$\begin{aligned} & v_t - 2v_{xx} = \sin(2\pi x)\,, && x \in (0,\,2),\, t > 0, \\ & v(x,0) = 3\sin(3\pi x)\,, && x \in [0,2], \\ & v(0,t) = v(2,t) = 0\,, && t \geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

b) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe (2) aus Teil a).

Viel Erfolg!