Aufgabe 1:

Gegeben ist die folgende Anfangswertaufgabe für $u = u(x,t)$:

$$u_t + u^3 \cdot u_x = 0 \qquad t \in \mathbb{R}^+,\, x \in \mathbb{R},$$
$$u(x,0) = \sqrt[3]{x} \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

a) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe mit Hilfe der Charakteristikenmethode.

b) Sind die Charakteristiken Geraden? Begründen Sie bitte Ihre Antwort.

c) Skizzieren Sie die Charakteristiken durch die Punkte $(x_0, 0)$ mit $x_0 = -1,\, 0,\, 8\,.$

Lösung zu 1:

a) Erweitertes Problem $\quad U_t + u^3 U_x + 0 \cdot U_u = 0$ ergibt:

$$\frac{dx}{dt} = u^3, \qquad \frac{du}{dt} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$
$$u = C, \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$
$$dx = C^3 dt$$
$$\Longrightarrow x(t) = C^3 t + D$$
$$\Longrightarrow D = x - u^3 t\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$
$$D = f(C) \Longrightarrow x - u^3 t = f(u). \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Anfangswerte liefern :

$$x(0) = f(u(x,0)) = f(\sqrt[3]{x(0)}) \Longrightarrow f(y) = y^3 \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$x - u^3 t = f(u) = u^3 \Longrightarrow x = u^3(1+t) \Longrightarrow u(x,t) = \left(\frac{x}{1+t}\right)^{\frac{1}{3}}\,. \ \textbf{[1 Punkt]}$$

b) Auf den Charakteristiken gilt

$\dfrac{du}{dt} = 0 \qquad \Longrightarrow u$ ist also konstant. Außerdem gilt

$\dfrac{dx}{dt} = u^3 \qquad \Longrightarrow$ also ist $\dfrac{dx}{dt}$ konsant entlang der Charakteristik. D.h. die Steigung der Charakteristiken ist konstant. Es handelt sich um Geraden. **[2 Punkte]**

c) Die Charakteristiken durch die Punkte $(x_0, 0)$ mit $x_0 = -1,\, 0\,, 8$ sind Geraden mit den Steigungen (dx/dt) -1,0 und 8.

SKIZZE: **[2 Punkte]**

Aufgabe 2:

Gegeben ist die folgende Anfangsrandwertaufgabe für $u = u(x,t)$:

$$\begin{aligned} u_t - 2u_{xx} &= -2xe^{-2t} + \sin(2\pi x)\,, && x \in (0,\,2),\ t > 0\,, \\ u(x,0) &= 1 + \frac{x}{2} + 3\sin(3\pi x)\,, && x \in [0,2]\,, \\ u(0,t) &= 1, \qquad u(2,t) = 2e^{-2t}\,, && t \geq 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass die Homogenisierung der Randwerte auf folgendes Problem für eine geeignet definierte Funktion v führt:

$$\begin{aligned} v_t - 2v_{xx} &= \sin(2\pi x)\,, && x \in (0,\,2),\ t > 0, \\ v(x,0) &= 3\sin(3\pi x)\,, && x \in [0,2], \\ v(0,t) &= v(2,t) = 0\,, && t \geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

b) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe (2) aus Teil a).

Lösungsskizze:

a) Homogenisierung:

$$v(x,t) = u(x,t) - 1 - \frac{x}{2}(2e^{-2t} - 1) = u(x,t) - 1 - xe^{-2t} + \frac{x}{2}\,.$$

oder

$$u(x,t) = v(x,t) + 1 + xe^{-2t} - \frac{x}{2}\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Dann gilt:

$$u_t = v_t - 2xe^{-2t}, \quad v_{xx} = u_{xx}\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Neue DGL:

$$v_t - 2xe^{-2t} - 2v_{xx} = -2xe^{-2t} + \sin(2\pi x) \iff \boxed{v_t - 2u_{xx} = \sin(2\pi x)}$$

Anfangswerte:

$$u(x,0) = v(x,0) + 1 + xe^0 - \frac{x}{2} = 1 + \frac{x}{2} + 3\sin(3\pi x) \iff \boxed{v(x,0) = 3\sin(3\pi x)}$$

Randwerte : $\boxed{v(0,t) = v(2,t) = 0}$ **[1 Punkt]**

b) Wir zerlegen die Aufgabe in zwei Teile:

Die homogene Dgl. mit den vorgegebenen Anfangs– und Randdaten

$$\begin{aligned} v_t^* - 2v_{xx}^* &= 0 && x \in (0,2)\,, t \in \mathbb{R}^+, \\ v^*(x,0) &= 3\sin(3\pi x) && x \in [0,2]\,, \\ v^*(0,t) &= v^*(2,t) = 0 && t \in \mathbb{R}^+\,. \end{aligned}$$

und die inhomogene Dgl. mit homogenen Anfangs– und Randdaten

$$\begin{aligned} &v_t^{**} - 2v_{xx}^{**} = \sin(2\pi x) && x \in (0,2)\,, t \in \mathbb{R}^+, \\ &v^{**}(x,0) = 0 && x \in (0,2)\,, \\ &v^{**}(0,t) = v^{**}(2,t) = 0 && t \in \mathbb{R}^+\,. \end{aligned}$$

Ansatz: **[1 Punkt]**

Mit $\omega = \frac{\pi}{2}$ und $c = 2$ lautet die Lösung des ersten Problems

$$v^*(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e^{-ck^2\omega^2 t} \sin(k\omega x) \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

wobei die $a_k \;=\; \frac{2}{2}\int_0^2 3\sin(3\pi x)\cdot \sin(\frac{k\pi}{2}x)dx$

die Fourierkoeffizienten von $3\sin(3\pi x)$ sind. Es gilt also

$a_6 \;=\; 3$ und $a_k = 0$ sonst **[1 Punkt]**

und damit

$v^*(x,t) \;=\; 3e^{-18\pi^2 t}\sin(3\pi x)\,.$ **[1 Punkt]**

Für v^{**} machen wir den Ansatz:

$$v^{**} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\sin(\frac{k\pi}{2}x)\,, \qquad v_k(0) = 0$$

Einsetzen in die Dgl ergibt:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\dot v_k(t) + 2\,\frac{k^2\pi^2}{4}v_k(t)\right]\sin(\frac{k\pi}{2}x) \;=\; \sin(\frac{4\pi}{2}x)$$

Damit erhalten wir $v_k(t) \equiv 0$ für $k \neq 4$ und die gewöhnliche Dgl

$$\dot v_4(t) + 8\pi^2 v_4(t) \;=\; 1 \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

für v_4. Die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung lautet

$$v_{4,h}(t) = Ce^{-8\pi^2 t}$$

Der Ansatz $v_4(t) = k$ liefert $\quad k = \dfrac{1}{8\pi^2} \quad .$

$$
\begin{aligned}
v_4(t) &= Ce^{-8\pi^2 t} + \frac{1}{8\pi^2} \qquad \text{und mit } v_2(0) = 0 \text{ folgt } C = -\frac{1}{8\pi^2} \ \textbf{[1 Punkt]} \\
v_4(t) &= \frac{1}{8\pi^2}\left(1 - e^{-8\pi^2 t}\right) \\
v^{**}(x,t) &= \frac{1}{8\pi^2}\left(1 - e^{-8\pi^2 t}\right)\sin(2\pi x) \qquad \textbf{[1 Punkt]}
\end{aligned}
$$

und damit gilt

$$v(x,t) = v^*(x,t) + v^{**}(x,t)$$