Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2012**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:

Gegeben sei das Anfangswertproblem für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)$$

mit

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} -1 \;, & \phantom{-1<}\; x \leq -1 \\ 1 \;, & -1 < x \leq 1 \\ 0 \;, & 1 < x \;. \end{cases}$$

a) Man berechne die Entropielösung für $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,4)$.

b) Man zeichne die Grundcharakteristiken ggf. mit Stoßfront im Rechteck $(x,t) \in (-2,3) \times (0,4)$.

c) Man zeichne $u(x,0)$, $u(x,1)$, $u(x,2)$, $u(x,3)$, $u(x,4)$.

Aufgabe 10:

Man bestimme den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und skizziere im $\mathbb{R}^2$ gegebenenfalls die Gebiete unterschiedlichen Typs:

a) $3u_{xx} + 4u_{xy} - xu_x = x^2y$,

b) $xu_{xx} + 4u_{xy} + yu_{yy} + (x^2 + y^2)u = 3$,

c) $u_{xx} + 2u_{xz} + 2u_{yy} - u_{zz} + zu_x + xu_y + yu_z - u = 7$.

Aufgabe 11:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{14}{5}u_{xx} - \frac{4}{5}u_{xy} + \frac{11}{5}u_{yy} + 2\sqrt{5}u_x - \sqrt{5}u_y + 3u = x$$

a) Man bestimme den Typ der Gleichung und

b) transformiere sie auf Normalform.

Aufgabe 12:

a) Man zeige, dass die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ folgende allgemeine Lösung besitzt:

$$u(x,t) = v(x+ct) + w(x-ct)\,, \quad v,w \in C^2.$$

Tipp: Man transformiere u auf die Koordinaten $\xi = x + ct$ und $\eta = x - ct$ und berechne die allgemeine Lösung der transformierten Differentialgleichung.

b) Man zeige, dass die folgende Randwertaufgabe für die Wellengleichung keine Lösung besitzt.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}\,, && 0 < x,t < 1 \\ u(x,0) &= x\,, && 0 \le x \le 1\,, \\ u(x,1) &= 1 + x(x-1)\,, && \\ u(0,t) &= t\,, && 0 \le t \le 1\,, \\ u(1,t) &= 1\,. && \end{aligned}$$

Man überprüfe auch, ob die vorgegebenen Randwerte in den Eckpunkten verträglich sind.

Abgabetermin: 7.5.-11.5. (zu Beginn der Übung)