Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2012**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 21:
Die Telegraphengleichung $u_{xx} = 4u_{tt} + 4u_t + u$ beschreibt den zeitlichen Verlauf einer Signalspannung u am Ort $x > 0$ in einem langen Übertragungskabel.

Gesucht ist die Signalspannung $u(x,t)$, wenn am Rand $x = 0$ des Übertragungskabels ein periodisches Signal der Form $u(0,t) = 5\sin(3t)$, für $t \geq 0$, eingespeist wird. Außerdem soll die Signalspannung u für $x \to \infty$ beschränkt sein.

a) Man zeige, dass ein Produktansatz der Form $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ zu keiner Lösung führt.

b) Man versuche den Lösungsansatz $u(x,t) = u_0 e^{-ax} \sin(3t - bx)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

Aufgabe 22:
Man zeige, dass die Funktion

$$u(x,t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi,\tau) d\xi d\tau$$

die Anfangswertaufgabe für die inhomogene Wellengleichung mit homogenen Anfangsdaten löst:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0\,.$$

Aufgabe 23:

Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 2\,, && x \in \mathbb{R},\ t > 0\,, \\ u(x,0) &= 50 \sin x\,, && x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) &= 2x\,, && x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und bestätige die Lösung durch Einsetzen in die Anfangswertaufgabe.

Hinweis: Man bestimme zunächst eine Lösung der inhomogene Wellengleichung mit homogenen Anfangsdaten und verwende anschließend das Superpositionsprinzip.

Aufgabe 24:
Gegeben sei das Anfangsrandwertproblem im Halbraum

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 0\,, && x \in \mathbb{R}_+,\ t > 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, && x \geq 0\,, \\ u_t(x,0) &= v_0(x)\,, && \\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0. \end{aligned}$$

a) Man gebe den Abhängigkeitsbereich der Lösung im Punkt $(x_0, t_0) = (3, 1)$ an.

b) Man zeichne den Bestimmtsheitsbereich der Lösung zum Interval $[0, 6]$ für $t \geq 0$.

c) Man löse das Anfangsrandwertproblem mit Hilfe der Reflexionsmethode und kläre, ob es sich bei der gefundenen Lösung um eine C^2-Funktion handelt, für

   (i) $u_0(x) = x(x-1)(x+1), \quad v_0(x) = 8x$,

   (ii) $u_0(x) = 1 - \cos x, \quad v_0(x) = 0$.

Abgabetermin: 25.6.- 29.6. (zu Beginn der Übung)