

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7

Aufgabe 25:

Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned}u_{tt} &= u_{xx} && \text{für } 0 < x < 1, 0 < t, \\u(0, t) &= 0 = u(1, t) && \text{für } t \geq 0, \\u(x, 0) &= u_0(x) := 0 \\u_t(x, 0) &= v_0(x) := x^2(x - 1) && \text{für } 0 \leq x \leq 1.\end{aligned}$$

- Man berechne die Lösung unter Verwendung der d'Alembertschen Lösungsformel und
- über den Produktansatz $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ nach Fourier.
- Man zeichne die Lösung.

Aufgabe 26:

Man löse die Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung unter Verwendung der Fourier-Methode:

$$\begin{aligned}u_{tt} &= 4u_{xx} + (2 + 36\pi^2 t^2) \sin(3\pi x), && \text{für } 0 < x < 1 \text{ und } t > 0, \\u(0, t) &= 1, \quad u(1, t) = -1, && \text{für } t \geq 0, \\u(x, 0) &= 1 - 2x, \quad u_t(x, 0) = 4\pi \sin(\pi x), && \text{für } 0 \leq x \leq 1\end{aligned}$$

und zeichne die Lösung für $(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1.5]$.

Aufgabe 27: (Klausuraufgabe vom 20.3.2009)

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} + \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) \quad \text{für } 0 < x < 4, \quad 0 < t, \\u(x, 0) &= \sin(\pi x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq 4, \\u(0, t) &= 0 = u(4, t) \quad \text{für } 0 \leq t.\end{aligned}$$

Hinweis: Dabei darf die sich aus dem Produktansatz ergebende Lösungsdarstellung verwendet werden.

Aufgabe 28:

Man löse die folgende Randeigenwertaufgabe mit Hilfe eines Produktansatzes der Form $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$

$$\begin{aligned}-\Delta u &= \lambda u, & (x, y) &\in]0, 3[\times]0, 4[, \\u(x, 0) &= 0 = u(x, 4), & x &\in [0, 3] \\u(0, y) &= 0 = u(3, y), & y &\in [0, 4].\end{aligned}$$

Anschließend gebe man die sechs kleinsten Eigenwerte an und zeichne die zugehörigen Eigenfunktionen.

Abgabetermin: 9.7.-13.7. (zu Beginn der Übung)