Aufgabe 1:

a) Gegeben sei das Anfangsrandwertproblem im Halbraum

$$\begin{aligned} u_{tt} - 9u_{xx} &= 0\,, & x \in \mathbb{R}_+\,, \quad t > 0\,, \\ u(x,0) &= 2x^4\,, & x \geq 0\,, \\ u_t(x,0) &= 12x\,, & \\ u(0,t) &= 0\,, & t > 0 \end{aligned}$$

(i) Man gebe den Abhängigkeitsbereich der Lösung im Punkt $(x_0, t_0) = (7, 1)$ an.

(ii) Man zeichne den Bestimmtheitsbereich der Lösung zum Intervall $[0, 12]$ für $t \geq 0$.

(iii) Man löse das Anfangsrandwertproblem mit Hilfe der Reflexionsmethode.

b) Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \quad \text{für} \quad 0 < x < 2\,, \quad 0 < t\,, \\ u(x,0) &= x(2-x) \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 2\,, \\ u(0,t) &= 0 = u(2,t) \quad \text{für} \quad 0 \leq t \end{aligned}$$

und bestimme deren maximalen Funktionswert.

Hinweis: Dabei darf die sich aus dem Produktansatz ergebende Lösungsdarstellung verwendet werden.

Aufgabe 2:

a) Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung unter Verwendung der Fourier-Methode

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + (\pi^2 t^2 + 2t)\sin(\pi x) \quad \text{für} \quad 0 < x < 2\,, \quad 0 < t\,, \\ u(x,0) &= 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 2\,, \\ u(0,t) &= 0 = u(2,t) \quad \text{für} \quad 0 \leq t\,. \end{aligned}$$

b) Man löse das Anfangswertproblem für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \quad \text{mit} \quad u(x,0) = 2x + 1\,,$$

gebe die charakteristischen Grundkurven an und skizziere sie.

Hinweis: Dabei dürfen die implizite Lösungsdarstellung für u und die allgemeine Darstellung der Grundcharakteristiken verwendet werden.