

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: (Wiederholung DGL I)

- a) Sei λ eine beliebige fest vorgegebene reelle Zahl. Bestimmen Sie eine reelle Darstellung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$y''(t) - \lambda y(t) = 0.$$

- b) Sei L eine weitere fest vorgegebene positive reelle Zahl. Bestimmen Sie alle Lösungen der Randwertaufgabe

$$y''(t) - \lambda y(t) = 0 \quad y(0) = y(L) = 0.$$

Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt die Randwertaufgabe nichttriviale Lösungen?

Die λ -werte, für die es nichttriviale Lösungen (d.h. Lösungen, die nicht konstant gleich Null sind) gibt, heißen Eigenwerte der Aufgabe. Die zugehörigen Lösungen heißen Eigenfunktionen.

Bemerkung: Die Lösungen dieser Eigenwertaufgabe werden im Laufe des Semesters immer wieder benötigt!

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Randwertaufgabe

$$x^2 y'' - xy' + (1 + \lambda^2)y = 0 \quad y(1) = 0 \quad y(e) = 0.$$

Hinweise: Bestimmen Sie die Randwertaufgabe, die sich für $u(t) := y(e^t)$ aus der ursprünglich gegebenen Aufgabe ergibt, und diskutieren Sie das Eigenwertproblem bei der dadurch entstandenen Gleichung für u . Übertragen Sie anschließend die Ergebnisse zurück.

Mit $x = e^t$, $u(t) = y(x(t))$ gilt

$$u(t) = y(e^t) \implies \frac{d}{dt} u(t) = y'(x) \cdot \dot{x}(t) = y'(x) \frac{d}{dt} (e^t).$$

Berechnen Sie analog $\frac{d^2}{dt^2} u(t)$.

Aufgabe 3: (Wiederholung Analysis II) Bestimmen Sie geeignete reelle Fourier-Reihen der folgenden Funktionen:

a) Ungerade $2L$ -periodische Fortsetzung von

$$f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(4\pi x) + 2 \sin(6\pi x) \quad L = 1,$$

b) Gerade $2L$ -periodische Fortsetzung von

$$f : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}[\rightarrow \mathbb{R}, \quad L = \pi \text{ mit}$$

$$f(t) = \begin{cases} 2, & -\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \frac{\pi}{4} \leq t < \frac{3\pi}{4}, \\ 2, & \frac{3\pi}{4} \leq t < \frac{5\pi}{4}. \end{cases}$$

Bemerkung: Auch wenn die Zeit in den Präsenzübungen nicht für die Bearbeitung dieser Aufgabe reichen sollte, werden Sie für DGL II die Berechnung von Fourier-Reihen beherrschen müssen. Bitte ggf. wiederholen!

Bearbeitungstermine: 2.4.13-5.4.13