Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2013**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5 Hausaufgaben

Aufgabe 1: (Klausur 2007)

Bestimmen Sie mit Hilfe der Fourier–Methode die Lösung der folgenden Anfangsrandwertaufgabe.

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= 25u_{xx} && 0 < x < 2,\ t \in \mathbb{R}^+, \\
u(x,0) &= 1 - \sin\left(\frac{x\pi}{4}\right) && 0 \le x \le 2\,, \\
u_t(x,0) &= \frac{x}{2} && 0 \le x \le 2\,, \\
u(0,t) &= 1, && t > 0\,, \\
u(2,t) &= t, && t > 0.
\end{aligned}$$

Hinweis : Sie können eine der beiden folgenden Formeln verwenden:

$$\sin(ax)\,\sin(bx) = \frac{1}{2}\,[\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x)]$$

$$\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \int \sin(ax)\,\sin(bx)\,dx = \frac{a}{b^2}\cos(ax)\sin(bx) - \frac{1}{b}\sin(ax)\cos(bx)$$

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie eine rotationssymmetrische Lösung $u(\boldsymbol{x},t) = \tilde{u}(r,t)$ der folgenden Anfangswertaufgabe:

$u_{tt} = c^2\Delta_3 u, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3,\ r = \|\boldsymbol{x}\|_2,\ t > 0,$

$u(\boldsymbol{x},0) = \sin(\|\boldsymbol{x}\|_2)\,, \qquad u_t(\boldsymbol{x},0) = 0\,.$

Hinweis: Beachten Sie, dass $r\tilde{u}(r,t)$ nach Satz 6.4 der Vorlesung die Wellengleichung im $\mathbb{R}^1$ löst und verwenden Sie die allgemeine Darstellung der Lösung der Wellengleichung.

b) Lösen Sie die folgende Anfangswertaufgabe mit Hilfe der Liouvillschen Lösungsformel (vgl. Satz 6.6 der Vorlesung).

$u_{tt} - c^2\Delta_3 u = 0, \qquad \boldsymbol{x} = (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3,\ t \ge 0$

$u(\boldsymbol{x},0) = y(x+y+z), \qquad u_t(\boldsymbol{x},0) = 0\,.$

Abgabetermine: 4.6.13 - 7.6.13