Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2013**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5 Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Die Funktion

$$\tilde{u}(x,t) \;=\; \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} h(\omega,\tau)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau$$

löst die inhomogene Anfangswertaufgabe

$$\tilde{u}_{tt} \,-\, c^2\tilde{u}_{xx} \;=\; h(x,t) \qquad \tilde{u}(x,0) \;=\; \tilde{u}_t(x,0) \;=\; 0\,.$$

Berechnen Sie eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} \,-\, 4u_{xx} \;&=\; -4x, && x\in\mathbb{R},\, t>0 \\ u(x,0) \;&=\; 1, && x\in\mathbb{R}, \\ u_t(x,0) \;&=\; \cos(x), && x\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

und bestätigen Sie die Lösung durch Einsetzen in die Anfangswertaufgabe.

Hinweis: Man bestimmt eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit homogenen Anfangswerten, löst die homogene Differentialgleichung mit den inhomogenen Anfangswerten und verwendet das Superpositionsprinzip.

Aufgabe 2:

a) Berechnen Sie die Lösung der folgenden Anfangsrandwertaufgabe:

$$\begin{aligned} u_{tt} \,-\, u_{xx} &= 0 && x\in(0,\frac{\pi}{2}),\, t>0, \\ u(x,0) \;&=\; \begin{cases} x & x\in[0,\frac{\pi}{4}], \\ \frac{\pi}{2}-x & x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}], \end{cases} \\ u_t(x,0) \;&=\; 2\sin(4x) && x\in[0,\frac{\pi}{2}], \\ u(0,t) \;&=\; u(\frac{\pi}{2},t) \;=\; 0 && t>0. \end{aligned}$$

b) Gegeben ist die Anfangsrandwertaufgabe

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - 4u_{xx} &= e^{-t}\left(1 - \frac{x}{3}\right) && x \in (0,\,3),\ t > 0,\\
u(x,0) &= 1 + 2\sin(\pi x) && x \in [0,3],\\
u_t(x,0) &= \frac{x}{3} && x \in [0,3], \qquad (1)\\
u(0,t) &= e^{-t} && t > 0,\\
u(3,t) &= 1 && t > 0.
\end{aligned}
$$

für $u = u(x,t)$. Welche Anfangsrandwertaufgabe erhält man nach geeigneter Homogenisierung der Randdaten?

Bearbeitungstermine: 4.6.13- 7.6.13