Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2013**
Prof. Dr. H.J. Oberle , Dr. P. Kiani

Differentialgleichungen II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 7 Hausaufgaben

Aufgabe 1: Zur Auswertung einer Tschebyscheff-Summe $f_n(x) \;=\; c_0/2 \;+\; \sum_{k=1}^{n} c_k\, T_k(x)$, $-1 \le x \le 1$, lässt sich der folgende *Algorithmus von Clenshaw* verwenden:

$$\begin{aligned}
& z_{n+1} := 0, \quad z_n := c_n, \\
& \text{für} \quad k = n-1,\, n-2,\, \ldots,\, 0 \\
& \qquad z_k \;:=\; c_k + 2\,x\,z_{k+1} - z_{k+2}, \\
& f_n(x) \;:=\; (z_0 - z_2)/2.
\end{aligned}$$

Der natürliche Logarithmus besitzt die T-Entwicklung

$$\ln{(1+x)} \;=\; c_0/2 \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, T_k(2x-1), \quad 0 \le x \le 1$$

mit den Koeffizienten $c_0 \;=\; 2\,\ln\left(\dfrac{3+\sqrt{8}}{4}\right)$ und $c_k \;=\; (-1)^{k+1}\,\dfrac{2}{k(3+\sqrt{8})^k}$.

Berechnen Sie mittels des Clenshaw-Verfahrens die aus den ersten $n+1$ Summanden bestehende Partialsumme $f_n(x)$ der obigen Reihe sowie den Fehler $e_n(x) := \ln{(1+x)} - f_n(x)$ für $x = 0,\, 0.1,\, 0.2, \ldots, 1.0$ und $n = 5,\, 10,\, 15$ (Tabellen). Zeichnen Sie ferner die Fehlerfunktion e_n auf $[0,1]$ für $n = 5,\, 10$ und 15.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die folgende Anfangsrandwertaufgabe für $w(x,t),\, x \in (0,1),\, t \in \mathbb{R}^+$.

$$w_t \;=\; \left((1+x)^2\, w_x\right)_x, \qquad w(0,t) \;=\; w(1,t) \;=\; 0, \qquad w(x,0) \;=\; g(x)\,.$$

a) Leiten Sie mit Hilfe des Ansatzes $w(x,t) = u(x) \cdot T(t)$ für die Lösung der Differentialgleichung zwei entkoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen für u und T her.

b) Schreiben Sie die Differentialgleichung für u in die Form $Lu = \lambda u$ mit einem geeigneten Differentialoperator L um, und zeigen Sie, dass L bzgl. der gegebenen Randbedingungen selbstadjungiert ist.

c) Zeigen Sie, dass die Substitution $y = \ln(1+x),\, u(x) \;=\; \tilde{u}(y(x))$ auf die Differentialgleichung

$$\tilde{u}'' + \tilde{u}' + \lambda \tilde{u} \;=\; 0.$$

führt, und bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

d) Führen Sie die Rücksubstitution durch und bestimmen Sie mit Hilfe der Randwerte die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Problems.

e) Geben Sie eine Reihendarstellung der Lösung des ursprünglichen Problems an.

Abgabetermine: 2.7. bzw. 5.7.13