Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2013**
Prof. Dr. H.J. Oberle
Dr. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 7

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Anfangswertaufgabe

$$x^2y''(x) - 2x^2y'(x) + (x^2-2)y(x) \;=\; 0\,, \qquad y(0) = y'(0) = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass mit y auch jedes Vielfache von y eine Lösung der Anfangswertaufgabe ist.

Machen Sie zur Berechnung einer Lösung analog zur Vorgehensweise in der Vorlesung (siehe (8.33) Vorlesungsfolien) einen Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\,.$$

Stellen Sie eine Rekursionsformel zur Berechnung der Koeffizienten a_k auf.

Zeigen Sie, dass bei einer zusätzlichen Bedingung $a_2 = 1$

$$a_k = \frac{1}{(k-2)!} \qquad \forall k \geq 2$$

gilt. Welche Funktion stellt die Reihe in diesem Fall dar?

Aufgabe 2P:

Gegeben sind der Raum der reellwertigen Funktionen aus $C^2[a,b]$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$<\, u, v\, >:= \int_a^b u(x)\cdot v(x)dx\,,$$

sowie der Differentialoperator $\quad L = -\dfrac{d^2}{dx^2}\,,$

und die Randbedingungen $\quad u'(a) = \;u(a),\; u'(b) = \;-u(b)\,.$

a) Zeigen Sie, dass der Differentialoperator bezüglich der gegebenen Funktionen selbstadjungiert (symmetrisch) ist, also

$$<\, Lu, v\, >=<\, u, Lv\, >$$

gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte des Differentialoperators L auf der Menge der zulässigen Funktionen (Funktionen, die die Randbedingungen erfüllen) positiv sind.

Bearbeitungstermine: 2.7. bzw. 5.7.13