Aufgabe 1:

Lösen Sie die folgende Randwertaufgabe für einen Kreisring

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0\,, && x,y \in \mathbb{R}\,,\ 1 < \sqrt{x^2+y^2} < 2\,,\\ u(x,y) &= 0\,, && x^2+y^2 = 1\,,\\ u(x,y) &= x^2+xy+x\,, && x^2+y^2=4\,. \end{aligned}$$

Hinweis: $\cos(2\phi) = 2\cos^2(\phi) - 1\,, \qquad \sin(2\phi) = 2\cos(\phi)\sin(\phi)\,.$

Lösung zur Aufgabe 1:

Allgemeiner Ansatz bei Ringen

$$u(r,\phi) = c_0 + d_0 \ln(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k r^{-k} + d_k r^k)(a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi))$$

oder

$$u(r,\phi) = c_0 + d_0 \ln(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k r^{-k} + \beta_k r^k)\cos(k\phi) + (\gamma_k r^{-k} + \delta_k r^k)\sin(k\phi))$$

[1 Punkt]

Wegen $u(1,\phi) = 0$ folgt

$\alpha_k = -\beta_k$ und $\gamma_k = -\delta_k$ für $k > 0$ und $c_0 = 0.$ **[1 Punkt]**

Also

$$u(r,\phi) = d_0 \ln(r) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (r^k - r^{-k})\cos(k\phi) + \delta_k (r^k - r^{-k})\sin(k\phi)) \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Die zweite Randbedingung lautet in Polarkoordinaten mit $x = r\cos(\phi)$ und $y = r\sin(\phi)$

$u(r,\phi) = r^2\cos^2(\phi)^2 + r\cos(\phi)\cdot r\sin(\phi) + r\cos(\phi)$ für $r = 2.$ **[1 Punkt]**

Für $r = 2$ also:

$$u(2,\phi) = 4\cos^2(\phi) + 4\cos(\phi)\sin(\phi) + 2\cos(\phi) = 2\cos(2\phi) + 2 + 2\sin(2\phi) + 2\cos(\phi)$$

$$= d_0\ln(2) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (2^k - 2^{-k})\cos(k\phi) + \delta_k (2^k - 2^{-k})\sin(k\phi)) \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

Also $\beta_k = \alpha_k = 0$ für alle $k \notin \{1,2\}$ und
$\delta_k = \gamma_k = 0$ für alle $k \neq 2.$ **[1 Punkt]**

Berechnung der nicht verschwindenden Koeffizienten:

$$d_0 \ln(2) = 2 \iff d_0 = \frac{2}{\ln(2)}\,,$$

$$(2^1 - 2^{-1})\beta_1 = 2 \iff \beta_1 = \frac{2}{2-\frac{1}{2}}, = \frac{4}{3}\,,$$

$$(2^2 - 2^{-2})\beta_2 = 2 \iff \beta_2 = \frac{2}{4-\frac{1}{4}}, = \frac{8}{15}\,,$$

$$(2^2 - 2^{-2})\delta_2 = 2 \iff \delta_2 = \frac{2}{4-\frac{1}{4}}, = \frac{8}{15}$$

[2 Punkte]

$$u(r,\phi) = \frac{8}{15}(r^2 - r^{-2})\,(\cos(2\phi) + \sin(2\phi)) \;+\; \frac{4}{3}(r - r^{-1})\cos(\phi) \;+\; \frac{2\ln(r)}{\ln(2)}$$ **[1 Punkt]**

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Lösen Sie die folgende Anfangswertaufgabe für $u(\boldsymbol{x}\,,t) = u(x,y,z,t)$ mit Hilfe der Lösungsformel von Liouville

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2\Delta_3 u &= 0\,, & \boldsymbol{x} &= (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3,\ t \geq 0\,, \\ u(\boldsymbol{x},0) &= u_0(\boldsymbol{x}) = 0\,, & \boldsymbol{x} &= (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3\,, \\ u_t(\boldsymbol{x},0) &= v_0(\boldsymbol{x}) = x+y+z\,, & \boldsymbol{x} &= (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3\,. \end{aligned}$$

Hinweis: $\sin(2\phi) = 2\cos(\phi)\sin(\phi)\,.$

Lösung zur Aufgabe 2:

$$u(\boldsymbol{x}\,,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_S u_0(\boldsymbol{x} + ct\,\boldsymbol{n})\,do\right) + \frac{t}{4\pi}\int_S v_0(\boldsymbol{x} + ct\,\boldsymbol{n})\,do$$

wobei S die Einheitssphäre mit der Parametrisierung

$$p(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \text{ ist und } do = \cos\theta\, d\varphi\, d\theta.$$

Es ist also

$$u(\boldsymbol{x},t) = \frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} v_0\begin{pmatrix} x + ct\cos\varphi\cos\theta \\ y + ct\sin\varphi\cos\theta \\ z + ct\sin\theta \end{pmatrix}\cos\theta d\theta d\varphi$$

$$= \frac{t}{4\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} (x + ct\cos\varphi\cos\theta + y + ct\sin\varphi\cos\theta + z + ct\sin\theta)\cos\theta\, d\varphi d\theta$$

$$= \frac{t}{4\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} ((x+y+z) + ct\cos\theta(cos\varphi + \sin\varphi) + ct\sin\theta)\cos\theta\, d\varphi d\theta$$

$$= \frac{t}{4\pi}\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left([(x+y+z)\cos\theta\,\varphi]_0^{2\pi} + ct\,\cos^2\theta\,[-\sin\varphi + \cos\varphi]_0^{2\pi} + [ct\sin\theta\cos\theta\,\varphi]_0^{2\pi}\right)d\theta\right]$$

$$u(\boldsymbol{x},t) = \frac{t}{4\pi}\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\big(2\pi(x+y+z)\cos\theta \;+\; ct\;\cos^2\theta\,[0+1-1] \;+\; 2\pi ct\sin\theta\cos\theta\big)\,d\theta\right]$$

$$= \frac{t}{4}\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2(x+y+z)\cos\theta \;+\; 0 \;+\; ct\cdot 2\sin\theta\cos\theta)\,d\theta\right]$$

$$= \frac{t}{4}\cdot 2(x+y+z)\,[\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \;+\; \frac{ct^2}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin(2\theta)d\theta$$

$$= \frac{t}{2}\cdot(x+y+z)\,[1-(-1)] \;-\; \frac{ct^2}{8}\,[\cos(2\theta)]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= (x+y+z)\cdot t \;-\; \frac{ct^2}{8}\,[\cos(\pi)-\cos(-\pi)] = \;(x+y+z)\cdot t\,.$$