Aufgabe 1: (12 Punkte)

Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t - 3u_{xx} &= \sin(\pi x) + \cos(t) + x\left(1 - \frac{1}{3}\cos(t)\right) && \text{für } x \in (0,3), t > 0, \\ u(x,0) &= 1 - \cos(2\pi x) && \text{für } x \in (0,3), \\ u(0,t) &= \sin(t), \quad u(3,t) = 3t && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

a) Überführen Sie die Aufgabe mittels einer geeigneten Homogenisierung der Randdaten in eine inhomogene Anfangsrandwertaufgabe mit homogenen Randdaten.

b) Lösen Sie die folgende Anfangsrandwertaufgabe:

$$\begin{aligned} v_t - 3v_{xx} &= \sin(\pi x) && \text{für } x \in (0,3), t > 0, \\ v(x,0) &= 1 - \cos(2\pi x) && \text{für } x \in (0,3), \\ v(0,t) &= 0, \quad v(3,t) = 0 && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

Hinweis: Die folgende Beziehung darf ohne eigenen Beweis verwendet werden:

$$\frac{2}{3}\int_0^3 \cos(2\pi x)\sin\left(\frac{k\pi}{3}x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2k(1-\cos(k\pi))}{\pi(k^2-36)} \quad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

Lösungsskizze:

a) Homogenisierung:

$$v(x,t) = u(x,t) - \sin(t) - \frac{x}{3}(3t - \sin(t)) = u(x,t) - \sin(t) - xt + \frac{x}{3}\sin(t)\,.$$

oder

$$u(x,t) = v(x,t) + \sin(t) + xt - \frac{x}{3}\sin(t). \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Dann gilt:

$$u_t = v_t + \cos(t) + x - \frac{x}{3}\cos(t), \quad v_{xx} = u_{xx}\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Neue DGL:

$$v_t + \cos(t) + x - \frac{x}{3}\cos(t) - 3u_{xx} = \sin(\pi x) + \cos(t) + x\left(1 - \tfrac{1}{3}\cos(t)\right) \quad \text{für } x \in (0,3), t > 0, \iff \boxed{v_t - 3v_{xx} = \sin(\pi x)} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Anfangswerte:

$$v(x,0) = u(x,0) - \sin(0) - \frac{x}{3}(0 - \sin(0)) \iff \boxed{v(x,0) = 1 - \cos(2\pi x)}$$

Randwerte : $\boxed{v(0,t) = v(3,t) = 0}$ **[1 Punkt]**

b) Wir zerlegen die Aufgabe in zwei Teile:
Die homogene Dgl. mit den vorgegebenen Anfangs– und Randdaten

$$\begin{aligned} &v_t^* - 3v_{xx}^* = 0 && x \in (0,3)\,, t \in \mathbb{R}^+, \\ &v^*(x,0) = 1 - \cos(2\pi x) && x \in [0,3]\,, \\ &v^*(0,t) = v^*(3,t) = 0 && t \in \mathbb{R}^+\,. \end{aligned}$$

und die inhomogene Dgl. mit homogenen Anfangs– und Randdaten

$$\begin{aligned} &v_t^{**} - 3v_{xx}^{**} = \sin(\pi x) && x \in (0,3)\,, t \in \mathbb{R}^+, \\ &v^{**}(x,0) = 0 && x \in (0,3)\,, \\ &v^{**}(0,t) = v^{**}(3,t) = 0 && t \in \mathbb{R}^+\,. \end{aligned}$$

Ansatz: **[1 Punkt]**
Mit $\omega = \frac{\pi}{3}$ und $c = 3$ lautet die Lösung des ersten Problems

$$v^*(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e^{-ck^2\omega^2 t}\, \sin(k\omega x)$$

mit $a_k \;=\; \frac{2}{3}\int_0^3 (1 - \cos(2\pi x)) \cdot \sin(\frac{k\pi}{3}x)dx$,
Berechnung der Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{3}\int_0^3 \sin(\frac{k\pi}{3}x)dx \;-\; \frac{2}{3}\int_0^3 \cos(2\pi x)\cdot\sin(\frac{k\pi}{3}x)dx \\ &= \frac{2}{k\pi}\left[-\cos(\frac{k\pi}{3}x)\right]_0^1 - \frac{2k(1-\cos(k\pi))}{\pi(k^2-36)} \qquad\qquad (Hinweis!) \\ &= \frac{2}{k\pi}\,(1-\cos(k\pi)) - \frac{2k(1-\cos(k\pi))}{\pi(k^2-36)} \;=\; \frac{2}{\pi}\,(1-\cos(k\pi))\left[\frac{1}{k} - \frac{k}{k^2-36}\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\,(1-\cos(k\pi))\,\frac{-36}{k(k^2-36)} \end{aligned}$$

und damit

$$v^*(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{72}{k\pi(k^2-36)}\,(\cos(k\pi)-1)\; e^{-\frac{k^2\pi^2}{3}t}\,\sin(\frac{k\pi}{3}x) \qquad \textbf{[3 Punkte]}$$

Für v^{**} machen wir den Ansatz:

$$v^{**} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\sin(\frac{k\pi}{3}x)\,, \qquad v_k(0) = 0$$

Einsetzen in die Dgl ergibt:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\dot v_k(t) + 3\,\frac{k^2\pi^2}{3^2} v_k(t)\right]\sin(\frac{k\pi}{3}x) \;=\; \sin(\pi x)$$

Damit erhalten wir $v_k(t) \equiv 0$ für $k \neq 3$ und die gewöhnliche Dgl

$$\dot v_3(t) + 3\,\pi^2 v_3(t) \;=\; 1$$

für v_3 . Die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung lautet

$$v_{3,h}(t) = \gamma e^{-3\pi^2 t}$$

Der Ansatz $v_{3,p}(t) = C$ liefert $\quad C = \dfrac{1}{3\pi^2}\qquad .$

$$v_3(t) = \gamma e^{-3\pi^2 t} + \frac{1}{3\pi^2} \qquad \text{und mit } v_3(0) = 0 \text{ folgt } \gamma = -\frac{1}{3\pi^2}$$

$$v_3(t) = \frac{1}{3\pi^2}\left(1 - e^{-3\pi^2 t}\right)$$

$$v^{**}(x,t) = \frac{1}{3\pi^2}\left(1 - e^{-3\pi^2 t}\right)\sin(\pi x) \qquad \text{[}\mathbf{4\ Punkte}\text{]}$$

und damit gilt

$$v(x,t) = v^*(x,t) + v^{**}(x,t)$$

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe für

$u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$ und $0 < t < \frac{1}{2}$

$$u_t + t \cdot u_x = u^2 \cdot \left(1 + e^{-t}\right)$$

$$u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Ist Ihre Lösung für alle $x \in \mathbb{R}$ und $0 < t < 0.5$ definiert? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Aufgabe 2:

$$\begin{aligned} &\tfrac{dx}{dt} = t &&\Longrightarrow x(t) = \tfrac{t^2}{2} + C \\ &C = x - \tfrac{t^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\tfrac{du}{dt} = u^2 \cdot (1 + e^{-t}) &&\Longrightarrow \tfrac{du}{u^2} = (1 + e^{-t})\,dt \\ &-\tfrac{1}{u} == t - e^{-t} + D &&\Longrightarrow D = e^{-t} - t - \tfrac{1}{u} \end{aligned}$$

$$D = f(C) \Longleftrightarrow e^{-t} - t - \frac{1}{u} = f(x - \frac{t^2}{2})$$

$$u(x,0) = \frac{1}{1+x^2} \Longleftrightarrow 1 - 0 - \frac{1}{\frac{1}{1+x^2}} = -x^2 = f(x)$$

$$\begin{aligned} e^{-t} - t - \frac{1}{u} &= -\,(x - \frac{t^2}{2})^2 \\ \Longleftrightarrow \frac{1}{u} &= (x - \frac{t^2}{2})^2 - t + e^{-t} \\ \Longleftrightarrow u(x,t) &= \left((x - \frac{t^2}{2})^2 - t + e^{-t}\right)^{-1} \end{aligned}$$

Die Lösung ist nicht definiert, wenn der Ausdruck in der Klammer verschwindet. Da $e^{-t} - t$ monoton fällt und

$\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4}} < \frac{1}{\sqrt{e}}$

ist $e^{-t} - t > 0\,, \qquad \forall\, t \le 0.5\,.$

Wegen $(x - \frac{t^2}{2})^2 \ge 0 \qquad \forall\, x,\, t \in \mathbb{R}$, ist der Ausdruck in der Klammer also für $0 \le t \le 0.5$ stets positiv.