**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **SoSe 2014**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

# Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Blatt 6

**Aufgabe 21:**

Die Telegraphengleichung $u_{xx} = u_{tt} + 4u_t + 4u$ beschreibt den zeitlichen Verlauf einer Signalspannung $u$ am Ort $x > 0$ in einem langen Übertragungskabel.

Gesucht ist die Signalspannung $u(x,t)$, wenn am Rand $x = 0$ des Übertragungskabels ein periodisches Signal der Form $u(0,t) = \cos(t)$ für $t \geq 0$ eingespeist wird. Außerdem soll die Signalspannung $u$ für $x \to \infty$ beschränkt sein.

a) Man zeige, dass ein Produktansatz der Form $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ zu keiner Lösung führt.

b) Man versuche den Lösungsansatz $u(x,t) = u_0 e^{-ax} \cos(t - bx)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

**Aufgabe 22:**
Man zeige, dass die Funktion

$$u(x,t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau$$

die Anfangswertaufgabe für die inhomogene Wellengleichung mit homogenen Anfangsdaten löst:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0\,.$$

**Aufgabe 23:**
Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - 4u_{xx} &= 2x\,, && x \in \mathbb{R},\ t > 0\,,\\
u(x,0) &= 0\,, && x \in \mathbb{R}\,,\\
u_t(x,0) &= 40\sin x\,, && x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

und bestätige die Lösung durch Einsetzen in die Anfangswertaufgabe.

*Hinweis:* Man bestimme zunächst eine Lösung der inhomogene Wellengleichung mit homogenen Anfangsdaten, löse die homogene Differentialgleichung mit Hilfe der d´Alembertschen Lösungsformel und verwende anschließend das Superpositionsprinzip.

**Aufgabe 24:** (Klausur WiSe 12/13)

Gegeben sei das Anfangsrandwertproblem im Halbraum

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - 9u_{xx} &= 0\,, && x \in \mathbb{R}_+\,, \quad t > 0\,,\\
u(x,0) &= 2x^4\,, && x \geq 0\,,\\
u_t(x,0) &= 12x\,, && \\
u(0,t) &= 0\,, && t > 0
\end{aligned}
$$

a) Man gebe den Abhängigkeitsbereich der Lösung im Punkt $(x_0, t_0) = (7, 1)$ an.

b) Man zeichne den Bestimmtheitsbereich der Lösung zum Intervall $[0, 12]$ für $t \geq 0$.

c) Man löse das Anfangsrandwertproblem mit Hilfe der Reflexionsmethode und kläre, ob es sich bei der gefundenen Lösung um eine $C^2$-Funktion handelt.

**Abgabetermin:** 24.6.- 27.6. (zu Beginn der Übung)