Aufgabe 1:

a) Man löse die Anfangswertaufgabe

$$2xu_x - \frac{3x}{y}u_y = 4x^2 \quad \text{mit} \quad u(1,y) = y^2 + 4$$

und bestätige die Lösung durch Einsetzen in die Anfangswertaufgabe.

b) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 16u_{xx}\,, && x \in \mathbb{R}\,, \quad t > 0\,, \\ u(x,0) &= 0\,, && x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) &= \cos x\,. \end{aligned}$$

(i) Man gebe den Abhängigkeitsbereich der Lösung im Punkt $(x_0, t_0) = (2, 1)$ an.

(ii) Man zeichne den Bestimmtheitsbereich der Lösung zum Intervall $[-10, 14]$ für $t \geq 0$

(iii) Man löse das Anfangswertproblem.

Aufgabe 2:

a) Man schreibe folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung in Matrix-Vektorschreibweise und bestimme den Typ

$$3u_{xx} + 8u_{xy} + 6u_{yy} + 2u_y - 2u = 7.$$

b) Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung unter Verwendung der Fourier-Methode

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + \sin(2\pi x) \quad \text{für} \quad 0 < x < 2\,, \quad 0 < t\,, \\ u(x,0) &= x \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 2\,, \\ u(0,t) &= 0\,, \ u(2,t) = 2 \quad \text{für} \quad 0 \leq t\,. \end{aligned}$$

Hinweis: Es darf der Lösungsansatz aus der Fourier-Methode verwendet werden.