**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. J. Behrens

**WiSe 2022/23**

# Klausur zur Mathematik IV
# (Modul: Differentialgleichungen II)

**??. März 2023**

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträgern gespeichert.

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Name:** | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **Vorname:** | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **Matr.-Nr.:** | | | | | | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Studiengang:** | AIW | CI<br>CS | ET | GES | IIW<br>IN | MB | MTB | SB | |

**Wertung nach PO :** Als Mathematik IV ☐ Einzelwertung DGL II ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

| Aufg. | Punkte | Korrekteur |
|---|---|---|
| **1** | | |
| **2** | | |
| **3** | | |
| **4** | | |

$\sum =$

**Exercise 1:** **[4 points]**

Compute the solution to the following initial value problem for $u(x,t)$:

$$\begin{aligned} u_t - 4t\,u_x &= 5\,, && x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= \cos(x) && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

**Exercise 2: [6= 2+4 points]**

Given a differential equation

$$u_t + (f(u))_x = 0$$

with the flow function $f(u) = \frac{(2u+1)^2}{3}$ .

a) Is the solution constant along the characteristics?
Are the characteristics straight lines?
Justify your answers.

b) Determine the entropy solution for the differential equation for the initial values

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & x \leq 0, \\ -1 & 0 < x. \end{cases}$$

Note: Only solutions for the given initial values are required. You don't need to compute solutions for general initial values!

**Exercise 3: [6 points]**

Determine the solution to the initial boundary value problem

$$
\begin{aligned}
u_t - 9u_{xx} &= 5\sin(3x) && 0 < x < 2\pi\,,\ 0 < t\,,\\
u(x,0) &= 0 && 0 \le x \le 2\pi,\\
u(0,t) &= 0 && 0 \le t,\\
u(\pi,t) &= 0 && 0 \le t.
\end{aligned}
$$

**Exercise 4: [4 points]**

Given the following initial value problem for the wave equation with continuos functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
u_{tt} \, - \, c^2 u_{xx} \, &= \, 0 \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad c > 0, \\
u(x,0) \, = \, u_0(x) \, &= \, f(x), \quad u_t(x,0) \, = \, v_0(x) \, = \, g(x) \qquad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Show that this initial value problem is well posed for finite $t \in [0, T]$.