Aufgabe 1)

Gegeben sei die vom Parameter $\alpha \in \mathbb{C}$ abhängige Abbildung

$$T_\alpha : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad T_\alpha(z) := \frac{(1+i)z + (i-1)}{-\alpha z + i}.$$

a) Geben Sie alle $\alpha \in \mathbb{C}$ an, für die T_α eine Möbiustransformation ist!

In den Aufgabenteilen b) - e) wird nur die Möbiustransformation T_1 betrachet:

$$T_1 : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad T_1(z) = \frac{(1+i)z + (i-1)}{-z + i}$$

b) Welches ist das Bild der imaginären Achse unter T_1?

c) Welches ist das Bild der reellen Achse unter T_1?

d) Welches ist das Bild des Einheitskreises $|z| = 1$ unter T_1?

e) Auf welche Menge wird dann die halbe Kreisscheibe

$$K := \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}\,(z) > 0 \text{ und } |z| < 1\}$$

abgebildet? Fertigen Sie dazu eine Skizze der Bildebene an!

Aufgabe 2)

Gegeben sei

$$f(z) \ = \ \frac{1}{z^2 + 2z + 2}\,.$$

a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von f.

b) Berechnen Sie die Residuen von f in allen isolierten Singularitäten von f und geben Sie die komplexe Partialbruchzerlegung von f an.

c) Berechnen Sie folgende Integrale

(i) $\displaystyle\oint_{C_1} f(z)\,dz\,, \qquad C_1 : \ [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ C_1(t) = e^{it},$

(ii) $\displaystyle\oint_{C_2} f(z)\,dz\,, \qquad C_2 : \ [0, 4\pi] \to \mathbb{C},\ C_2(t) = (-1+i) + e^{it},$

(iii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3 + 2x^2 + 2x}\,dx\,.$

Geben Sie das Ergebnis für das letzte (reelle) Integral auch in kartesichen Koordinaten an.