Aufgabe 1)

Gegeben sei die vom Parameter $\alpha \in \mathbb{C}$ abängige Abbildung

$$T_\alpha : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad T_\alpha(z) := \frac{(1+i)z + (i-1)}{-\alpha z + i}.$$

a) Geben Sie alle $\alpha \in \mathbb{C}$ an, für die T_α eine Möbiustransformation ist!

In den Aufgabenteilen b) - e) wird nur die Möbiustransformation T_1 betrachet:

$$T_1 : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad T_1(z) = \frac{(1+i)z + (i-1)}{-z + i}$$

b) Welches ist das Bild der imaginären Achse unter T_1?

c) Welches ist das Bild der reellen Achse unter T_1?

d) Welches ist das Bild des Einheitskreises $|z| = 1$ unter T_1?

e) Auf welche Menge wird dann die halbe Kreisscheibe

$$K := \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}\,(z) > 0 \text{ und } |z| < 1\}$$

abgebildet? Fertigen Sie dazu eine Skizze der Bildebene an!

ML Aufgabe 1)

a) T_α ist keine Mobiustransformation, falls

$$\begin{aligned} & (1+i)i + \alpha(i-1) = 0 \\ \iff \quad & i - 1 + \alpha(i-i) = 0 \\ \iff \quad & \alpha = -1 \end{aligned}$$

Somit ist T_α für alle $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ eine Möbiustransformation.

b) Verallgemeinerte Kreise durch i werden auf Geraden abgebildet.

$$T_1(i) = \infty, \quad T_1(0) = \frac{i-1}{i} = 1 + i, \quad T_1(\infty) = \frac{1+i}{-1} = -1 - i.$$

Also ist das Bild die Gerade

$$\mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z).$$

c) **Möglichkeit 1:** Das Bild ist ein echter Kreis (da $i \notin \mathbb{R}$). Dieser ist symmetrisch zur Geraden

$$\mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z).$$

Wieder gilt: $T_1(0) = 1 + i$ und $T_1(\infty) = -1 - i$.
Das Bild ist demnach der Kreis $|z| = \sqrt{2}$.

Möglichkeit 2:

$$T_1(1) = \frac{1 + i + i - 1}{-1 + i} = \frac{2i}{-1 + i} = i(-1 - i) = 1 - i$$

Wieder gilt: $T_1(0) = 1 + i$ und $T_1(\infty) = -1 - i$.
Der Kreis der durch alle drei Punkte geht ist $|z| = \sqrt{2}$

d) **Möglichkeit 1:** Der Einheitskreis ist symmetrisch zur imaginären und reellen Achse. Das Bild ist eine Gerade. Diese steht auf Grund der Symmetrie senkrecht auf der Geraden $\mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z)$ und ist symmetrisch zum Kreis $|z| = \sqrt{2}$. Letzteres bedeutet, dass die Gerade durch den Ursprung gehen muss. Das Bild ist also die Gerade

$$\mathrm{Im}\,(z) = -\mathrm{Re}\,(z).$$

Möglichkeit 2:

$$T_1(-1) = \frac{-1 - i + i - 1}{1 + i} = \frac{-2}{1 + i} = -(1 - i) = -1 + i$$

Wieder gilt: $T_1(1) = 1 - i$ und $T_1(i) = \infty$. Das Bild ist die Gerade

$$\mathrm{Im}\,(z) = -\mathrm{Re}\,(z).$$

e) Das Bild von K wird durch die Geraden $\mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z)$ und $\mathrm{Im}\,(z) = -\mathrm{Re}\,(z)$ begrenzt. Wegen

$$T_1(1) = \frac{1 + i + i - 1}{-1 + i} = \frac{2i}{-1 + i} = i(-1 - i) = 1 - i$$

wird die rechte Halbebene auf das Gebiet unterhalb der Gerade $\mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z)$ abgebildet. Wegen

$$T(0) = 1 + i$$

wird das Innere des Einheitskreises auf das Gebiet oberhalb der Gerade $\mathrm{Im}\,(z) = -\mathrm{Re}\,(z)$ abgebildet.
Die Bildmenge ist also der Sektor $\{z \in \mathbb{C} : \ \arg(z) \in] - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[\}$.

BILD

Aufgabe 2) Gegeben sei

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2}.$$

a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von f.

b) Berechnen Sie die Residuen von f in allen isolierten Singularitäten von f und geben Sie die komplexe Partialbruchzerlegung von f an.

c) Berechnen Sie folgende Integrale

(i) $\oint_{C_1} f(z)\,dz\,, \qquad C_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ C_1(t) = e^{it},$

(ii) $\oint_{C_2} f(z)\,dz\,, \qquad C_2 : [0, 4\pi] \to \mathbb{C},\ C_2(t) = (-1 + i) + e^{it},$

(iii) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3 + 2x^2 + 2x}\,dx\,.$
Geben Sie das Ergebnis für das letzte (reelle) Integral auch in kartesichen Koordinaten an.

ML Aufgabe 2)

a) $z^2 + 2z + 2 = (z + 1)^2 + 1 = 0 \iff z = -1 \pm i.$
Es liegen einfache Pole in $z_1 = -1 + i$ und $z_2 = -1 - i$ vor.

b) $f(z) = \dfrac{1}{(z - (-1 + i))(z - (-1 - i))}$

$$Res f(-1 + i) = \left.\frac{1}{(z - (-1 - i))}\right|_{z=-1+i} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$$

$$Res f(-1 - i) = \left.\frac{1}{(z - (-1 + i))}\right|_{z=-1-i} = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}$$

$$f(z) = \frac{i/2}{(z - (-1 - i))} - \frac{i/2}{(z - (-1 + i))}$$

c) Berechnen Sie folgende Integrale

(i) $\oint_{C_1} f(z)\,dz = 0, \qquad C_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ C_1(t) = e^{it},$

(ii) $\oint_{C_2} f(z)\,dz = 2 \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = 2\pi \qquad C_2 : [0, 4\pi] \to \mathbb{C},\ C_2(t) = (-1 + i) + e^{it},$

(iii) $\int_0^\infty \dfrac{\sqrt{x}}{x^3 + 2x^2 + 2x}\, dx \; =: I.$

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x^2 + 2x + 21}\, dx \\
&= \int_0^\infty \frac{f(z)}{\sqrt{z}} dz = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi \frac{1}{2} i}} \left[Res \left(\frac{f}{\sqrt{z}}; -1 + i \right) + Res \left(\frac{f}{\sqrt{z}}; -1 - i \right) \right] \\
&= \frac{2\pi i}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{-1+i}(-1+i+1+i)} + \frac{1}{\sqrt{-1-i}(-1-i+1-i)} \right] \\
&= \frac{\pi i}{2i} \left[\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2} e^{i3\pi/4}}} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2} e^{i5\pi/4}}} \right] \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt[4]{2}} \left[e^{-i3\pi/8} - e^{-i5\pi/8} \right] = \frac{\pi}{\sqrt[4]{2}} \cos(3\pi/8).
\end{aligned}
$$