

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:

a) Man überprüfe, welche der folgenden Funktionen holomorph in \mathbb{C} sind:

- (i) $f(z) = z^2 \cos z$,
- (ii) $f(z) = \operatorname{Im}(z^3)$,
- (iii) $f(z) = \exp(\bar{z})$,
- (iv) $f(z) = z + \bar{z} + 1$.

b) Man zeige, dass

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2 + x + 1$$

harmonisch ist und konstruiere eine zu u konjugiert harmonische Funktion $v(x, y)$, d.h. eine Funktion v , für die die Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.

Aufgabe 10:

Es sei $z = re^{i\varphi}$ und $g(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$.

a) Man zeige, dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten die Gestalt

$$ru_r = v_\varphi, \quad rv_r = -u_\varphi$$

besitzen.

b) Man zeige unter Verwendung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, dass $g(z) = z^n$ für $n \geq 1$ holomorph ist.

Aufgabe 11:

Gegeben seien die Kurven $c_1(t) = it$ und $c_2(t) = e^{it}$ jeweils für $0 < t < \pi$.

- a) Man skizziere die Kurven c_1 und c_2 in der z -Ebene und bestimme ihren Schnittpunkt mit Schnittwinkel.
- b) In welche Bildkurven der w -Ebene gehen c_1 und c_2 unter dem Hauptwert von $w = \ln z$ über? Man überprüfe, ob im Schnittpunkt der Bildkurven der Winkel und das lokale Längenverhältnis erhalten bleiben.

Aufgabe 12:

- a) Man skizziere die beiden Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$ und berechne die beiden Punkte z_1 und z_2 , die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen.
- b) Man bestimme alle konformen Funktionen

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$.

- c) Man skizziere das Bild von K_1 und K_2 unter T , wenn noch $T(0) = 1$ gilt.

Abgabetermin: 20.5.-22.5 (zu Beginn der Übung)