

Aufgabe 1:

a) Man zeige, dass

$$v(x, y) = 4x^3y - 4xy^3 - 2xy$$

harmonisch ist und konstruiere eine zu v konjugiert harmonische Funktion $u(x, y)$, d.h. eine Funktion u , für die die Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.

b) Für die positiv orientierte Kurve $c: |z| = 4$ berechne man

$$\oint_c \frac{\cosh z}{(z - i\pi)^5} dz.$$

c) Man bestimme und klassifiziere alle Singularitäten der folgenden Funktionen

$$(i) f(z) = \frac{z + i\pi}{e^z + 1},$$

$$(ii) g(z) = \frac{z + 4}{z^3 + 6z^2 + 9z + 4},$$

$$(iii) h(z) = \sin\left(\frac{z + 2}{z^2 - 4}\right).$$

Aufgabe 2:

a) Man berechne die Potenzreihenentwicklung um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ der Funktion

$$f(z) = \frac{2}{4z^2 - 1},$$

die im Punkt $z = i$ konvergiert.

b) Man berechne unter Verwendung des Residuenkalküls die folgenden Integrale

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 10x^2 + 9} dx,$$

$$(ii) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3x)}{x^2 - 6x + 10} dx.$$