2 Komplexe Funktionen

Wir betrachten komplexwertige Funktionen f einer komplexen Variablen.

2.1 Begriff und geometrische Deutung

Definition: *Eine* `komplexe Funktion` *ist eine Funktion, deren Definitions- und Wertebereich jeweils Punktmengen der komplexen Ebene sind.* □

Bemerkung: Eine komplexe Funktion $f : A \longrightarrow B$ mit Definitionsbereich $A \subset \mathbb{C}$ und Wertebereich $B \subset \mathbb{C}$ ordnet jedem $z \in A$ ein eindeutiges $w = f(z) \in B$ zu.

Im konkreten Fall ist diese eindeutige Zuordnung

$$f : z \longmapsto f(z) \qquad \text{für } z \in A$$

durch eine *explizite* Abbildungsvorschrift gegeben.

Allerdings lassen sich (komplexe) Funktionen auch *implizit* definieren.

Beispiele für komplexe Funktionen.

- $f(z) = (3z+1)^2$ für $z \in \mathbb{C}$;
- $f(z) = \exp(ix) + y$ für $z = x + iy \in \mathbb{C}$;
- $f(z) = 1/z$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Man verwendet üblicherweise das Symbol $z \in \mathbb{C}$ für das `Argument` und $w \in \mathbb{C}$ für den `Wert` von f, also $w = f(z)$. Weiterhin notieren wir $z = x + iy$ und

$$w = u + iv \qquad \text{d.h. } u = \mathrm{Re}(w) \text{ und } v = \mathrm{Im}(w)$$

bzw.

$$u(z) = \mathrm{Re}(f(z)) \qquad \text{und } v(z) = \mathrm{Im}(f(z)).$$

Frage: Wie stellen wir f graphisch dar?

Antwort: Wir skizzieren den Definitionsbereich und den Wertebereich in zwei verschiedenen komplexen Ebenen, der `z-Ebene` (`Urbildebene`) und der `w-Ebene` (`Bildebene`).

Komplexe Funktionen mit reellen Argumenten.

Wir betrachten gelegentlich *komplexwertige* Funktionen $f : I \to \mathbb{C}$ mit *reellen* Argumenten, d.h. für einen Definitionsbereich $I \subset \mathbb{R}$,

$$f : t \mapsto f(t) \in \mathbb{C} \qquad \text{für } t \in I.$$

Beispiele.

- $f(t) = a + bt$ für $a, b \in \mathbb{C}$, wobei $b \neq 0$;
- $f(t) = \exp(i\omega t)$ für $\omega \in (0, \infty) \subset \mathbb{R}$;

2.2 Lineare Funktionen

Definition: *Eine komplexe Funktion f heißt* linear*, falls f für feste komplexe Konstanten $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, eine Darstellung der folgenden Form besitzt.*

$$f(z) = az + b \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

□

Frage: Wie können wir lineare Funktionen geometrisch deuten?

Spezialfall 1: Die Wahl $a = 1$ führt zu einer Translation um b,

$$f(z) = z + b \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

Spezialfall 2: Die Wahl $a \in (0, \infty)$ und $b = 0$ führt zu einer Streckung bzw. Stauchung,

$$f(z) = az \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

d.h. das Argument z wird gestreckt $(a > 1)$ oder gestaucht $(0 < a < 1)$.
Allgemein spricht man von einer Skalierung mit Skalierungsfaktor $a > 0$.

Spezialfall 3: Die Wahl $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$ und $b = 0$ führt zu einer Drehung (bzw. Rotation)

$$f(z) = az \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

genauer: Drehung um Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$, wobei $\alpha = \arg(a)$, bzw. $a = \exp(i\alpha)$.

Spezialfall 4: Die Wahl $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, und $b = 0$ führt zu einer Drehstreckung

$$f(z) = az \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

die wir als Komposition einer Rotation und einer Skalierung verstehen.

Genauer gilt: Für

$$a = |a| \exp(i\alpha) \qquad \text{mit } \alpha = \arg(a)$$

handelt es sich um eine Rotation um Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ und Skalierung um $|a|$.

Allgemeiner Fall: Für $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, lässt sich jede lineare Funktion

$$f(z) = az + b = |a| \exp(i\alpha)z + b$$

als Komposition

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

von drei Abbildungen schreiben:

- $f_1(z) = \exp(i\alpha)z$ eine Drehung um den Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$;
- $f_2(z) = |a|z$ eine Streckung um den Skalierungsfaktor $|a| > 0$;
- $f_3(z) = z + b$ eine Verschiebung um den Vektor b.

Bemerkung: Drehung f_1 und Streckung f_2 `kommutieren`, d.h. lassen sich vertauschen, denn es gilt

$$f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2$$

und somit

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1 = f_3 \circ f_1 \circ f_2.$$

$\square$

2.3 Quadratische Funktionen

Definition: *Eine komplexe Funktion f heißt* quadratisch*, falls f für feste Konstanten $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a, b \neq 0$, eine Darstellung der folgenden Form besitzt.*

$$f(z) = az^2 + bz + c \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

$\square$

Wir betrachten zunächst das geometrische Verhalten der quadratischen Funktion

$$f(z) = z^2 \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Dazu betrachten wir die Bilder der achsenparallelen Geraden unter f.

Setze $w = z^2$. Dann ergibt die für $z = x + iy$ und $w = u + iv$ die Darstellung

$$w = u + iv = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

und somit

$$u = x^2 - y^2 \qquad \text{und} \qquad v = 2xy.$$

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto z^2$.

Für das Bild einer zur x-Achse parallelen Geraden $y \equiv y_0$ bekommt man somit

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y_0^2 \\ v &= 2xy_0 \end{aligned}$$

Für $y_0 = 0$ (die x-Achse) bekommen wir $u = x^2$ und $v = 0$.

Für $y_0 \neq 0$ können wir x mit $x = v/(2y_0)$ eliminieren, und bekommen somit

$$u = \frac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2$$

eine nach rechts geöffnete Parabel, symmetrisch zur u-Achse mit Brennpunkt Null, und den Schnittpunkten $u = -y_0^2$ (mit u-Achse) und $v = \pm 2y_0^2$ (v-Achse).

Fazit: Die Schar zur x-Achse paralleler Geraden wird durch die quadratische Funktion $f(z) = z^2$ auf eine Schar `konfokaler` (d.h. gleiche Symmetrieachse, gleicher Brennpunkt) nach rechts geöffneter Parabeln abgebildet.

Die Geraden $y \equiv y_0$ und $y \equiv -y_0$ werden auf die gleiche Parabel abgebildet.

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto z^2$.

Für das Bild einer zur y-Achse parallelen Geraden $x \equiv x_0$ bekommt man somit

$$\begin{aligned} u &= x_0^2 - y^2 \\ v &= 2x_0 y \end{aligned}$$

Für $x_0 = 0$ (die y-Achse) bekommen wir $u = -y^2$ und $v = 0$.

Für $x_0 \neq 0$ können wir y mit $y = v/(2x_0)$ eliminieren, und bekommen somit

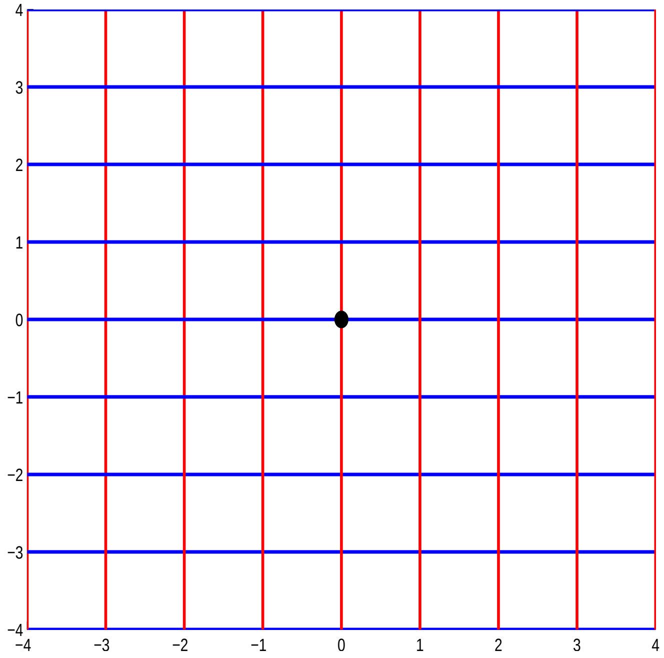
$$u = x_0^2 - \frac{v^2}{4x_0^2}$$

eine nach links geöffnete Parabel, symmetrisch zur u-Achse mit Brennpunkt Null, und den Schnittpunkten $u = -x_0^2$ (mit u-Achse) und $v = \pm 2x_0^2$ (v-Achse).

Fazit: Die Schar zur y-Achse paralleler Geraden wird durch die Funktion $f(z) = z^2$ auf eine Schar konfokaler nach links geöffneter Parabeln abgebildet.

Die Geraden $x \equiv x_0$ und $x \equiv -x_0$ werden auf die gleiche Parabel abgebildet.

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto z^2$.



Urbild.

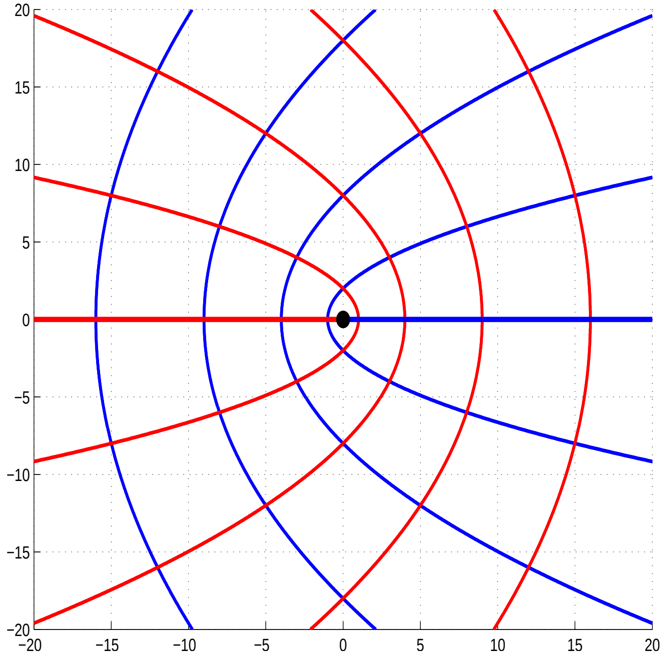


Bild von $f(z) = z^2$.

Allgemeine quadratische Funktionen.

Für $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a, b \neq 0$, und mit der Darstellung

$$f(z) = az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

setzt sich jede quadratische Funktion als Komposition

$$f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

von vier Abbildungen zusammen:

- der Translation $f_1(z) = z + \frac{b}{2a}$;
- der quadratischen Funktion $f_2(z) = z^2$;
- der Drehstreckung $f_3(z) = az$;
- der Translation $f_4(z) = z - \frac{b^2}{4a} + c$.

$\square$

2.4 Die Exponentialfunktion

Definition: *Die* `komplexe Exponentialfunktion` $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *ist definiert durch*

$$\exp(z) \equiv e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) \qquad \textit{für } z = x + iy.$$

□

Beachte: Es gilt das Additiontheorem

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2} \qquad \text{für } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Frage: Wie sieht die komplexe Exponentialfunktion $z \longrightarrow \exp(z)$ aus?

Für $w = \exp(z)$, $z = x + iy$ und $w = u + iv$ bekommen wir

$$w = u + iv = e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

und somit

$$u = e^x\cos(y) \qquad \text{und} \qquad v = e^x\sin(y).$$

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$.

Für das Bild einer zur x-Achse parallelen Geraden $y \equiv y_0$ bekommt man somit

$$\begin{aligned} u &= e^x \cos(y_0) \\ v &= e^x \sin(y_0) \end{aligned}$$

- Für festes y_0 ergibt dies ein vom Ursprung ausgehenden Strahl, der mit der positiven x-Achse den Winkel y_0 einschließt.
- Für Winkel y_0 und y_1, die sich um ein Vielfaches von 2π unterscheiden, d.h.

  $$y_1 = y_0 + 2\pi k \qquad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}$$

  ergibt sich der gleiche Strahl.
- Genauer: Wegen der Periodizität von $\exp(z)$ gilt

  $$e^{z+2\pi i k} = e^z e^{2\pi i k} = e^z(\cos(2\pi k) + i \sin(2\pi k)) = e^z \cdot 1 = e^z.$$

  d.h. zwei Punkte mit gleichen Realteilen, deren Imaginärteile sich um ein Vielfaches von 2π unterscheiden, werden auf den gleichen Punkt abgebildet.

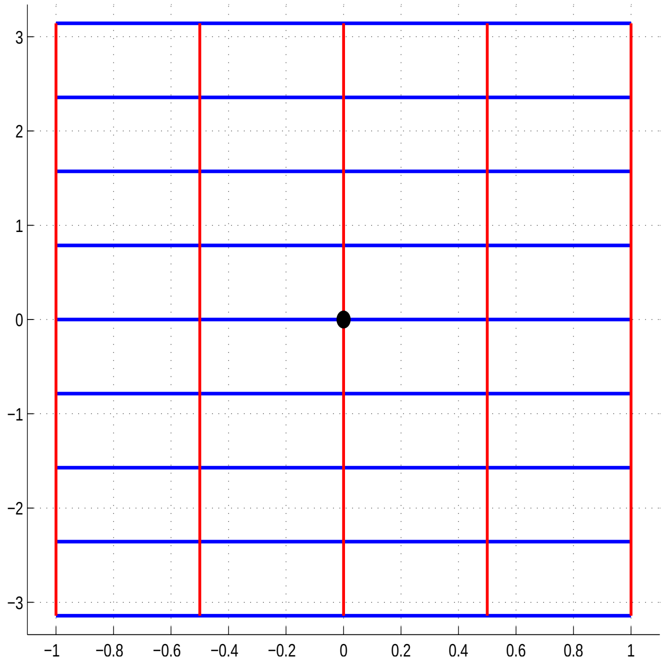
Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$.

Für das Bild einer zur y-Achse parallelen Geraden $x \equiv x_0$ bekommt man

$$u = e^{x_0} \cos(y) \qquad \text{und} \qquad v = e^{x_0} \sin(y)$$

- Für festes x_0 ergibt dies einen Kreis um Null mit Radius e^{x_0}.
- **Beachte:** Der Nullpunkt liegt nicht im Bild der Exponentialfunktion, d.h. es gibt kein Argument $z \in \mathbb{C}$ mit $\exp(z) = 0$. Somit gilt $e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- **Beobachtung:** Die Exponentialfunktion bildet Rechtecksgitter im kartesischen Koordinatensystem auf Netz von Kurven ab, die sich rechtwinklig schneiden.
- **Genauer:** Kurven, die sich im kartesischen Koordinatensystem rechtwinklig schneiden, werden unter der Exponentialfunktion exp auf Kurven abgebildet, die sich ebenso (im jeweiligen Schnittpunkt) rechtwinklig schneiden.
- **Noch allgemeiner:** Die Exponentialfunktion ist in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ `winkeltreu` (bzw. `konform`). Genauere Details dazu später.

Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$.



Urbild.

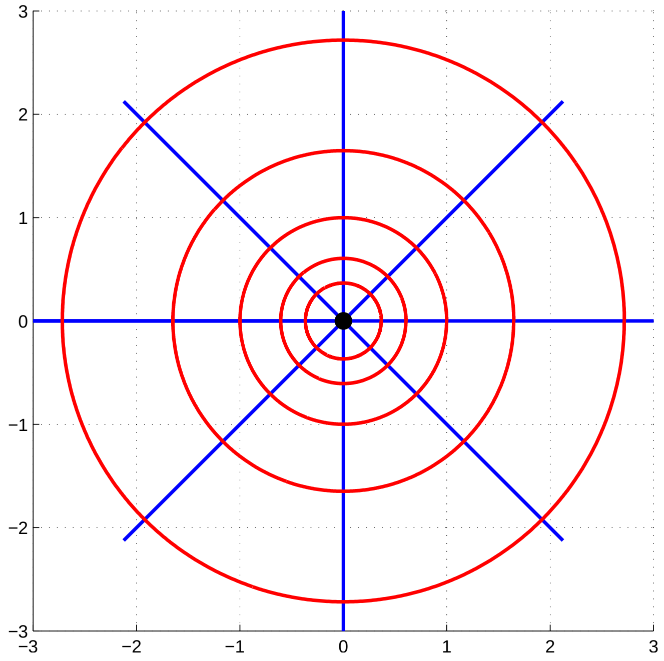


Bild von $f(z) = \exp(z)$.

2.5 Die Umkehrfunktion

Definition: *Eine komplexe Funktion* $f(z)$ *heißt* eineindeutig *(*injektiv*), wenn es zu jedem Punkt* $w \in \mathbb{C}$ *ihres Wertebereichs genau einen Punkt* $z \in \mathbb{C}$ *ihres Definitionsbereichs gibt mit* $f(z) = w$*.* □

- Injektive Funktionen nehmen jeden Wert ihres Wertebereichs genau einmal an.
- Man nennt injektive Funktionen auch schlicht.

Beispiele.

- die lineare Funktion $f(z) = az + b$, $a \neq 0$, ist injektiv.
- die quadratische Funktion $f(z) = z^2$, ist *nicht* injektiv, denn es gilt $f(z) = f(-z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- die komplexe Exponentialfunktion $\exp(z)$ ist *nicht* injektiv, denn es gilt $\exp(z) = \exp(z + 2\pi i k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $z \in \mathbb{C}$.

Einschränkung des Definitionsbereichs.

Bemerkung: Eine nicht injektive Funktion wird ggf. durch eine geeignete Einschränkung ihres Definitionsbereichs injektiv.

Beispiel: Betrachte die quadratische Funktion

$$f(z) = z^2 \qquad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \mathrm{Re}(z) > 0$$

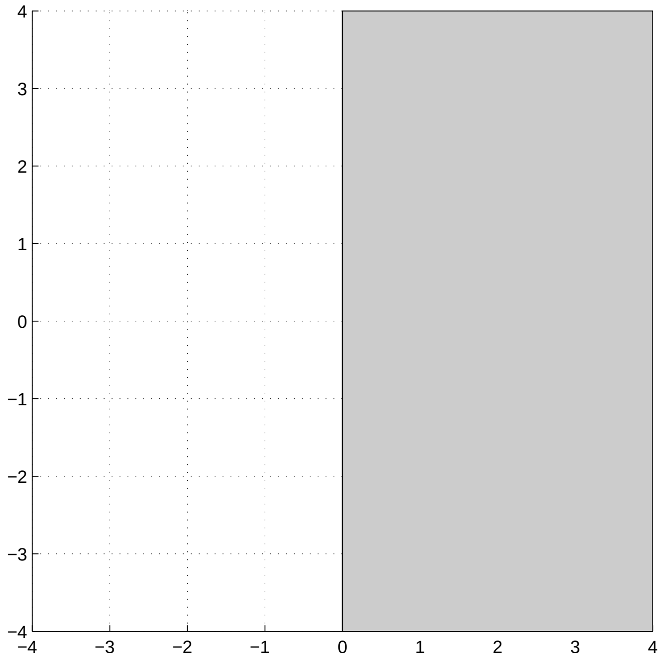
auf der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Hier ist f injektiv.

Weiterhin ist in diesem Fall der Bildbereich gegeben durch die aufgeschnittene komplexe Ebene

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^- &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) \neq 0 \text{ oder } \mathrm{Re}(z) > 0\} \\ &= \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \,|\, z \leq 0\}\end{aligned}$$

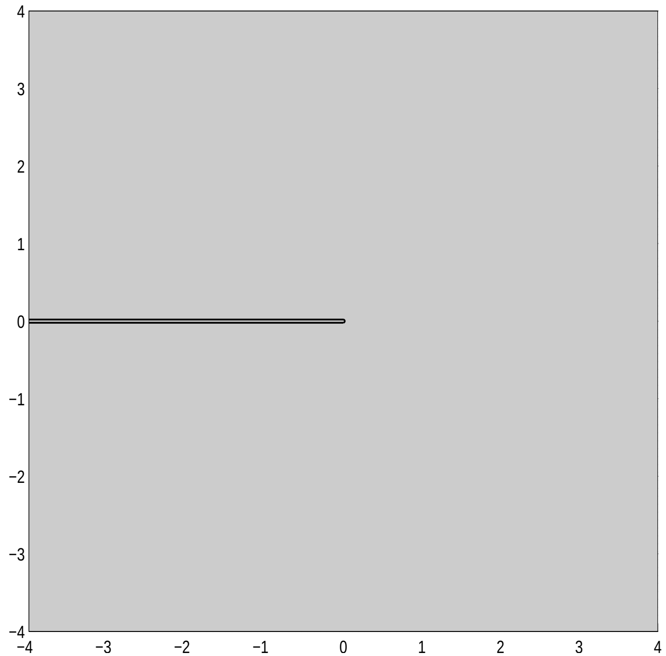
$\square$

Wertebereich von $z \mapsto z^2$ auf rechter Halbebene.



Die rechte Halbebene

(Definitionsbereich)



Die aufgeschnittene komplexe Ebene $\mathbb{C}^-$

(Wertebereich)

Umkehrfunktion.

Definition: *Sei* f *eine injektive Funktion mit Definitionsbereich* $D(f)$ *und Wertebereich* $W(f)$. *Dann ist die* Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \to D(f)$ *zu* f *diejenige Funktion, die jedem Punkt* $w \in W(f)$ *den (eindeutigen) Punkt* $z \in D(f)$ *mit* $f(z) = w$ *zuordnet, d.h. es gilt* $f^{-1}(w) = z$ *bzw.*

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(z) &= z \qquad \textit{für alle } z \in D(f) \\ (f \circ f^{-1})(w) &= w \qquad \textit{für alle } w \in W(f) \end{aligned}$$

$\square$

Beispiel: Für den Definitionsbereich

$$D(f) = \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r > 0 \text{ und } -\pi/2 < \varphi < \pi/2\}$$

existiert die Umkehrfunktion f^{-1} von $f(z) = z^2$ mit Wertebereich $W(f) = \mathbb{C}^-$.

Für den Hauptteil der Wurzel $f^{-1} : W(f) \to D(f)$ gilt

$$w = f^{-1}(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2} \qquad \text{für } z = re^{i\varphi} \text{ mit } \varphi = \arg(z) \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Umkehrfunktion der n-ten Potenz.

Beispiel: Die Potenzfunktion

$$f(z) = z^n \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}, \quad n \geq 2$$

ist für den Definitionsbereich

$$D(f) = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; -\frac{\pi}{n} < \arg(z) < \frac{\pi}{n} \right\}$$

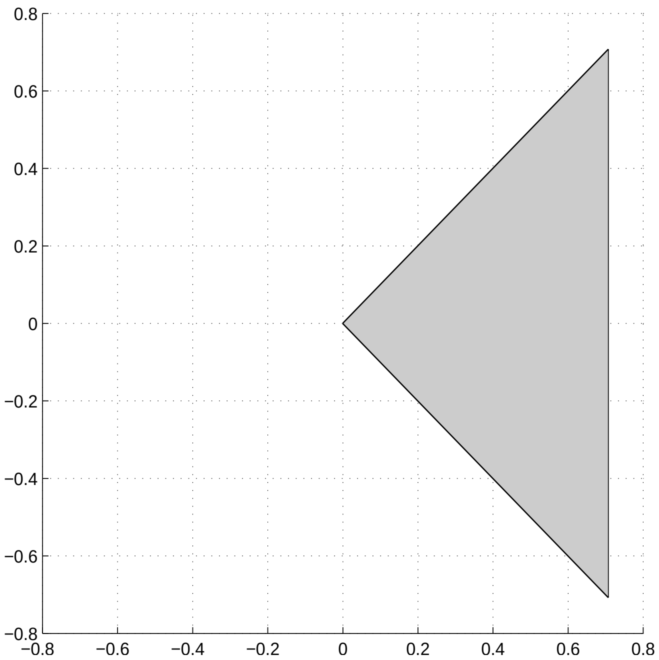
injektiv. Für den Wertebereich bekommt man in diesem Fall $W(f) = \mathbb{C}^-$.

Für die Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \to D(f)$ gilt

$$w = f^{-1}(z) = \sqrt[n]{r} e^{i\varphi/n} \qquad \text{für } z = re^{i\varphi} \text{ mit } \varphi = \arg(z) \in \left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right).$$

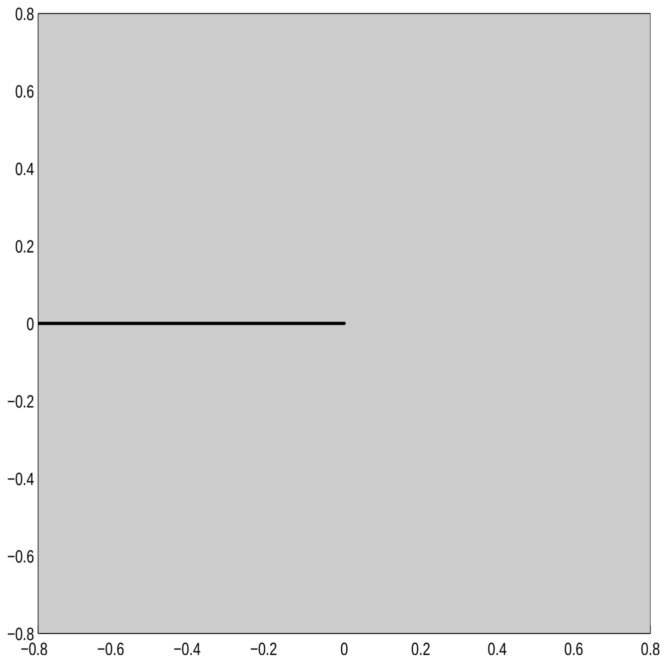
$\square$

Beispiel $n = 4$: Betrachte die Funktion $z \mapsto z^4$.



$\{z \in \mathbb{C} \,|\, \arg(z) \in (-\pi/4, \pi/4)\}$

(Definitionsbereich)



Die aufgeschnittene komplexe Ebene $\mathbb{C}^-$

(Wertebereich)