2.6 Der komplexe Logarithmus und allgemeine Potenzen

Ziel: Umkehrung der komplexen Exponentialfunktion

$$f(z) = \exp(z).$$

Beachte: Die Exponentialfunktion $\exp(z)$ ist für *alle* $z \in \mathbb{C}$ erklärt, und es gilt

$$D(\exp) = \mathbb{C} \qquad \text{und} \qquad W(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

für den Definitions- und Wertebereich.

Aber: Die Exponentialfunktion ist nicht injektiv auf $\mathbb{C}$.

Also: Zur Konstruktion einer Umkehrfunktion $\exp^{-1}$ von exp müssen wir den Definitionsbereich von exp geeignet einschränken.

Frage: Sei $z = x + iy \in W(\exp)$. Welche Werte $w = u + iv$ kommen in Frage, so dass

$$e^w = z$$

gilt?

Konstruktion des komplexen Logarithmus.

Ausgangspunkt: Für $z = x + iy \in W(\exp)$ soll gelten

$$e^w = z \qquad \text{für ein } w = u + iv \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt

$$|e^w| = |e^u| = |z|$$

und somit $u = \log(|z|)$, wobei $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ der *reelle* Logarithmus.

Weiterhin gilt

$$\arg(e^w) = \arg(e^{u+iv}) = \arg(e^u e^{iv}) = v$$

und somit $v = \arg(z)$.

Daher besteht die Menge der Lösungen von $e^w = z$ aus den komplexen Zahlen

$$w = \log(|z|) + i \arg(z),$$

wobei für $\varphi = \arg(z)$ *jedes* Argument von z in Frage kommt.

Die Menge der Lösungen von $e^w = z$ heißt `komplexer Logarithmus` von z. $\square$

Beispiele. Log(z) bezeichnet den komplexen Logarithmus von z.

Beispiel 1: Wie sieht der komplexe Logarithmus von -1 aus?

Zunächst gilt $\log(|-1|) = \log(1) = 0$.

Die Zahlen $\pm\pi, \pm3\pi, \pm5\pi, \ldots$ sind die Argumente von -1. Somit gilt

$$\mathrm{Log}(-1) = \{i(2k+1)\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$$

für die Werte des Logarithmus von -1.

Beispiel 2: Wie sieht der komplexe Logarithmus von $-1+i$ aus?

Zunächst gilt $|-1+i| = \sqrt{2}$ und weiterhin ist $\arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$ ein mögliches Argument von $-1+i$. Somit gilt

$$\mathrm{Log}(-1+i) = \left\{\log(\sqrt{2}) + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right) \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

für die Werte des Logarithmus von $-1+i$.

Beispiel 3: Für $x > 0$ gilt $\mathrm{Log}(x) = \{\log(x) + 2\pi i k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$.

Der Hauptwert des Logarithmus.

Die vorherigen Überlegungen zur Gleichung

$$z = e^w$$

zeigten, dass die Exponentialfunktion auf dem Streifen

$$S = \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im}(w) < \pi\}$$

injektiv ist. Der zugehörige Wertebereich ist $\mathbb{C}^-$.

Der einzige Wert von $\operatorname{Log}(z)$, der zu dem Streifen S gehört, ist

$$w = \log(|z|) + \mathrm{i} \arg(z) \qquad \text{mit} \quad -\pi < \arg(z) < \pi.$$

Dieser Wert heißt der `Hauptwert des Logarithmus` von z, kurz $\operatorname{Log}(z)$. $\square$

Bemerkung: Der Hauptwert des Logarithmus ist nur in der aufgeschnittenen komplexen Ebene $\mathbb{C}^-$ definiert. Auf der negativen reellen Achse und bei $z = 0$ ist $\operatorname{Log}(z)$ nicht definiert. Auf der positiven reellen Achse stimmt $\operatorname{Log}(z)$ mit dem reellen Logarithmus $\log(x)$ überein. $\square$

Die allgemeine Potenz.

Definition: *Für* $a, b \in \mathbb{C}$ *bezeichnet* $\{a^b\}$ *die Menge der komplexen Zahlen*

$$e^{b \operatorname{Log}(a)} \qquad \text{für } a \neq 0$$

wobei $\operatorname{Log}(a)$ *alle Werte von* $\{\log(|a|) + i \arg(a)\}$ *durchläuft. Somit gilt*

$$\{a^b\} = \left\{ e^{b \log(|a|) + i\alpha + 2\pi i k} \,|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

wobei $\alpha = \arg(a)$. *Liegt* a *in der aufgeschnittenen komplexen Ebene,* $a \in \mathbb{C}^-$, *so enthält die Menge* $\{a^b\}$ *den Wert*

$$e^{b \operatorname{Log}(a)} = e^{b(\log(|a|) + i\alpha)} \qquad \text{mit } \alpha = \arg(a) \in (-\pi, \pi).$$

Dieser Wert heißt der Hauptwert *von* $\{a^b\}$. $\square$

Beispiele.

Beispiel 1: Sei $a = re^{i\alpha} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $b = n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\{a^b\} &= \left\{ e^{n(\log(r)+i\alpha+2\pi ik)} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ e^{n\log(r)+in\alpha+2\pi ikn} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \\
&= \left\{ r^n e^{in\alpha} e^{2\pi ikn} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} = r^n e^{in\alpha} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}
\end{aligned}$$

Beispiel 2: Für $x > 0$ gilt $\{x^i\} = e^{i\operatorname{Log}(x)} = \cos(\log(x)) + i\sin(\log(x))$.

Beispiel 3: Sei $a = re^{i\alpha} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\{a^{1/n}\} &= \left\{ e^{(1/n)(\log(r)+i\alpha+2\pi ik)} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ r^{1/n} e^{i\alpha/n} e^{2\pi ik/n} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \\
&= \left\{ r^{1/n} e^{i\alpha/n} e^{2\pi i(k+n)/n} \,\middle|\, 0 \leq k < n \right\}
\end{aligned}$$

d.h. die Werte z von $\{a^{1/n}\}$ sind die n-ten Wurzeln von a, so dass $z^n = a$, kurz

$$z = \sqrt[n]{a}$$

mit Hauptwert $r^{1/n} e^{i\alpha/n}$ für $\alpha/n = \arg(a)/n \in (-\pi, \pi)$. $\square$

Bemerkungen.

Bemerkung 1: Die aus der reellen Analysis bekannte Funktionalgleichung

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b) \qquad \text{für alle } a, b > 0$$

gilt für Hauptwerte des komplexen Logarithmus im allgemeinen nicht, d.h. es gibt $a, b \in \mathbb{C}^-$ mit

$$\mathrm{Log}(ab) \neq \mathrm{Log}(a) + \mathrm{Log}(b),$$

z.B. $a = i$ und $b = -1 + i$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}(i) + \mathrm{Log}(-1+i) &= i\frac{\pi}{2} + \log(\sqrt{2}) + i\frac{3}{4}\pi = \log(\sqrt{2}) + i\frac{5}{4}\pi \\ &\neq \log(\sqrt{2}) - i\frac{3}{4}\pi = \mathrm{Log}(-1-i) = \mathrm{Log}(i(-1+i)) \end{aligned}$$

Bemerkung 2: Es gilt die Gleichung

$$\text{Hauptwert von } \{a^b\} \cdot \text{Hauptwert von } \{a^c\} = \text{Hauptwert von } \{a^{b+c}\}.$$

2.7 Die Joukowski-Funktion

Die `Joukowski-Funktion`, definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad \text{für } z \neq 0,$$

ist im Zusammenhang mit Strömungsproblemen von Interesse (Details später).

Beobachtung: Es gilt die Symmetrie

$$f(z) = f(1/z) \qquad \text{für } z \neq 0.$$

Ziel: Analysiere das geometrische Verhalten der Joukowski-Funktion.

Bestimme dazu für

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

die Bilder der Kreise $|z| \equiv \text{const}$ und der Strahlen $\arg(z) \equiv \text{const}$.

Geometrisches Verhalten der Joukowski-Funktion.

Für

$$z = re^{i\varphi} \qquad \text{und} \qquad w = u + iv$$

bekommen wir

$$u + iv = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right)$$

und somit

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos(\varphi) \qquad \text{und} \qquad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin(\varphi).$$

Für das Bild des Kreises $r \equiv r_0 > 0$ bekommen wir die Parameterdarstellung

$$\left.\begin{array}{rcl} u & = & \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right)\cos(\varphi) \\ v & = & \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right)\sin(\varphi) \end{array}\right\} \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

für den Einheitskreis $r_0 \equiv 1$ somit $u = \cos(\varphi)$, für $0 \leq \varphi < 2\pi$, und $v \equiv 0$, also die Strecke zwischen den Punkten -1 und 1, die *zweimal* durchlaufen wird. $\square$

Geometrisches Verhalten der Joukowski-Funktion.

Für $r_0 \neq 1$ können wir φ eliminieren, womit man die Ellipse

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right)^2} = 1$$

mit den Halbachsen

$$a = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right) \qquad \text{und} \qquad b = \frac{1}{2}\left|r_0 - \frac{1}{r_0}\right|$$

und Brennpunkten ± 1 bekommt.

Fazit: Die Joukowski-Funktion bildet eine Schar von Kreisen $r \equiv \text{const}$ auf eine Schar `kofokaler Ellipsen` ab. Die beiden Kreise $r \equiv r_0$ und $r \equiv 1/r_0$ werden dabei auf die gleiche Ellipse abgebildet. $\square$

Geometrisches Verhalten der Joukowski-Funktion.

Für die Bilder des Strahls $\varphi \equiv \varphi_0$ bekommt man

$$\left.\begin{array}{rcl} u & = & \frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos(\varphi_0) \\ v & = & \frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin(\varphi_0) \end{array}\right\} \qquad 0 < r < \infty,$$

für die positive x-Achse $\varphi_0 = 0$ somit

$$\left.\begin{array}{rcl} u & = & \frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right) \\ v & = & 0 \end{array}\right\} \qquad 0 < r < \infty,$$

das Stück $\{(u,0)\,|\,1 \leq u < \infty\}$ der u-Achse.

Analog erhalten wir für die negative x-Achse $\varphi_0 = \pi$ das Stück $-\infty < u < -1$.

Die Strahlen $\varphi_0 = \pi/2$ (positive y-Achse) und $\varphi_0 = 3\pi/2$ (negative y-Achse) werden auf die komplette v-Achse abgebildet.

Geometrisches Verhalten der Joukowski-Funktion.

Falls $\varphi_0 \notin \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$, so können wir r eliminieren, womit wir die Hyperbel

$$\frac{u^2}{\cos^2(\varphi_0)} - \frac{v^2}{\sin^2(\varphi_0)} = 1$$

mit den Halbachsen

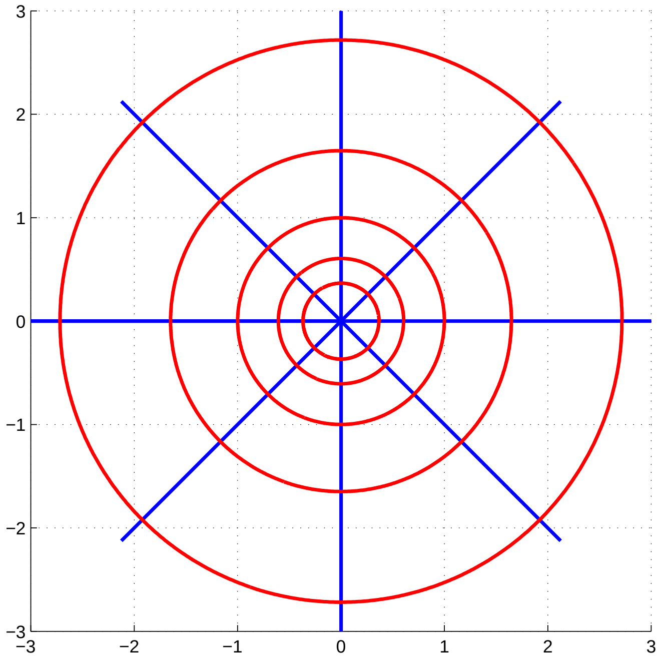
$$a = |\cos(\varphi_0)| \qquad \text{und} \qquad b = |\sin(\varphi_0)|$$

bekommen. Der Abstand der Brennpunkte der Hyperbel von Zentrum beträgt

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\cos^2(\varphi_0) + \sin^2(\varphi_0)} = 1.$$

Somit liegen die beiden Brennpunkte bei ± 1.

Bilder unter der Joukowski-Funktion.



Urbild.

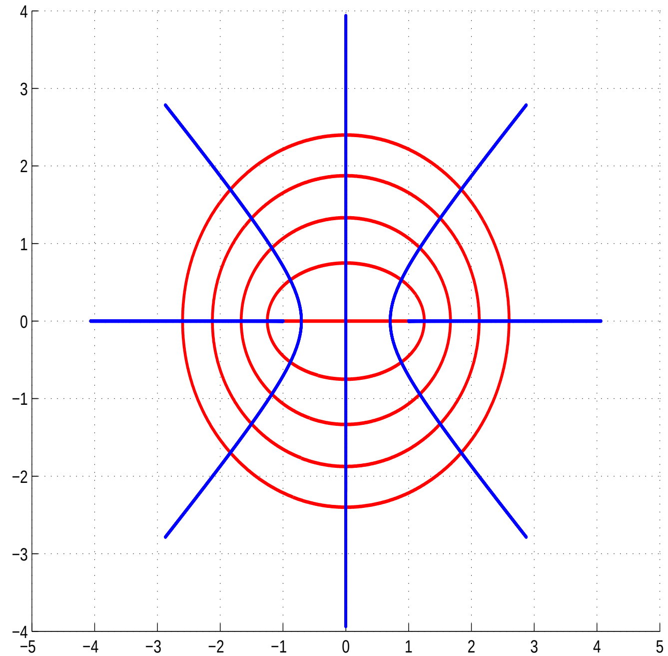


Bild der Joukowski-Funktion.

Weitere Bemerkungen zur Joukowski-Funktion.

Bemerkung und Fazit: Die Joukowski-Funktion bildet das Polarkoordinatennetz auf ein Netz von Ellipsen und Hyperbeln ab, die sich jeweils im rechten Winkel schneiden. Die Joukowski-Funktion ist winkeltreu.

Bemerkung: Die Joukowski-Funktion ist auf ihrem Definitionsbereich $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *nicht* injektiv, denn für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1, 0\}$ gilt $z \neq 1/z$, aber $f(z) = f(1/z)$.

Bemerkung: Auf den folgenden zwei Einschränkungen ihres Definitionsbereichs ist die Joukowski-Funktion injektiv.

(a) Auf dem `Komplement des Einheitskreises` $D(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

(b) Auf der `oberen Halbebene` $D(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Bemerkung: Die Umkehrfunktion $w = f^{-1}(z)$ der Joukowski-Funktion $f(w)$ bekommt man durch Auflösen resultierenden der quadratischen Gleichung

$$w^2 - 2zw + 1 = 0$$

nach w in dem jeweiligen Definitionsbereich $D(f)$, somit $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$. $\square$

2.8 Komplexe trigonometrische Funktionen

Die Beziehungen der Eulerschen Formel sind für $x \in \mathbb{R}$ schon bekannt.

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos(x) + i\sin(x) \\ e^{-ix} &= \cos(x) - i\sin(x) \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich durch Addition bzw. Subtraktion die Formeln

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \\ \sin x &= \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Die rechten Seiten sind jedoch auch für beliebige komplexe Argumente definiert. Somit setzen wir

$$\begin{aligned} \cos z &:= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \qquad \text{für } z \in \mathbb{C} \\ \sin z &:= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \qquad \text{für } z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Rechenregeln für trigonometrische Funktionen.

Es gilt

$$\begin{aligned}\cos(z+2\pi) &= \frac{1}{2}\left(e^{i(z+2\pi)}+e^{-i(z+2\pi)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{iz}e^{2\pi i}+e^{-iz}e^{-2\pi i}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)\\ &= \cos(z)\end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Analog zeigt man

$$\sin(z+2\pi) = \sin(z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Fazit: Die komplexen trigonometrischen Funktionen sin und cos sind (genauso wie die reellen trigonometrischen Funktionen) periodisch mit Periode 2π. $\square$

Weitere Rechenregeln.

Symmetrie.

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \cos(-z) && \text{für alle } z \in \mathbb{C} \\ \sin(z) &= -\sin(-z) && \text{für alle } z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Phasenverschiebung.

$$\begin{aligned} \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2i}\left(e^{i(z+\pi/2)} - e^{-i(z+\pi/2)}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz}e^{i\pi/2} - e^{-iz}e^{-i\pi/2}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(ie^{iz} - (-i)e^{-iz}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = \cos(z) \end{aligned}$$

Zerlegung der Eins.

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Additionstheoreme.

$$\begin{aligned} \cos(z_1 + z_2) &= \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2) && \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ \sin(z_1 + z_2) &= \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2) && \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$