4 Analytische Funktionen

4.1 Komplexe Differenzierbarkeit

Fragen:

- Wie *differenziert* man (sinnvollerweise) komplexe Funktionen?
- Wie definiert man *Grenzwerte* im Komplexen?
- Was bedeutet *Stetigkeit* einer komplexen Funktionen?

Ansatz: Sei $f(z) : D \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion mit

$$f(z) = u(z) + iv(z)$$

wobei $u, v : D \to \mathbb{R}$ reellwertig. Setze weiterhin $z = x + iy$, so dass

$$f(z) \equiv f(x, y) \qquad u(z) \equiv u(x, y) \qquad v(z) \equiv v(x, y).$$

Komplexe Differentiale.

Voraussetzungen:

- Sei $z_0 = x_0 + iy_0$ ein fester Punkt im Definitionsbereich $D(f)$ von f.
- Es gebe eine (offene) Umgebung um z_0, in denen die *reellen* Funktionen $u \equiv u(x,y)$, $v \equiv v(x,y)$ jeweils stetige partielle Ableitungen nach x, y haben, d.h. die partiellen Ableitungen u_x, u_y, v_x und v_y sind stetig um (x_0, y_0).

Dann gilt:

- Es existieren die `(totalen) Differentiale` du und dv in (x_0, y_0).
- Mit $dx = x - x_0$ und $dy = y - y_0$ gilt (aus der reellen Analysis)

$$\begin{aligned} du &= u_x(x_0, y_0)dx + u_y(x_0, y_0)dy \\ dv &= v_x(x_0, y_0)dx + v_y(x_0, y_0)dy. \end{aligned}$$

Definition: *Unter dem* `Differential` *der Funktion* $f = u + iv$ *im Punkt* $z_0 = x_0 + iy_0$ *verstehen wir die (in* dx *und* dy*) lineare Funktion*

$$df = du + idv.$$

Differentiale und partielle Ableitungen.

Mit $df = du + idv$ hat das Differential von f in z_0 die Form

$$df = [u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)]\, dx + [u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)]\, dy.$$

Wir stellen die Koeffizienten von df (bez. dx und dy) nun durch entsprechende partielle Ableitungen f_x, f_y von f dar. Es gilt

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}, \quad h \to 0 \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0) + i\,[v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \lim_{h \to 0} \frac{[v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)]}{h} \end{aligned}$$

und somit gilt

$$f_x(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0).$$

Zur weiteren Form des Differentials.

Entsprechend gilt

$$f_y(x_0, y_0) = u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)$$

und somit bekommen wir insgesamt

$$df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy.$$

Nun: Stelle df in Abhängigkeit von dz (statt von dx und dy) dar. Schreibe dazu

$$dz = z - z_0 = (x + iy) - (x_0 + iy_0) = dx + idy.$$

Beachte: Es gilt

$$\overline{dz} = \overline{z - z_0} = dx - idy$$

und somit

$$dx = \frac{1}{2}\left(dz + \overline{dz}\right) \qquad \text{und} \qquad dy = \frac{1}{2i}\left(dz - \overline{dz}\right).$$

Komplexe Differenzierbarkeit.

Damit bekommen wir weiterhin die Darstellung

$$df = A dz + B \overline{dz},$$

wobei

$$A = \frac{1}{2}(f_x(z_0) - i f_y(z_0)) \qquad \text{und} \qquad B = \frac{1}{2}(f_x(z_0) + i f_y(z_0))$$

und es gilt

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(z_0) - df}{dz} = 0.$$

Definition: *Die Funktion* f *heißt* komplex differenzierbar *in* z_0*, falls*

$$df = \frac{1}{2}(f_x(z_0) - i f_y(z_0)) dz$$

d.h. falls $B = 0$. □

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen.

Falls f in z_0 komplex differenzierbar, so gilt (mit $B = 0$)

$$f_x(z_0) + if_y(z_0) = 0$$

somit

$$u_x(z_0) + iv_x(z_0) + i[u_y(z_0) + iv_y(z_0)] = 0$$

bzw.

$$u_x(z_0) - v_y(z_0) + i[u_y(z_0) + v_x(z_0)] = 0.$$

Trennt man nach Real- und Imaginärteil, so bekommt man die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \qquad \text{und} \qquad u_y = -v_x.$$

Fazit: Die Funktion $f = u + iv$ ist genau dann in z_0 komplex differenzierbar, wenn u und v in z_0 die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen. □

Punktweise Differenzierbarkeit.

Beobachtung: Falls f in z_0 komplex differenzierbar, so gilt

$$df = A dz \qquad \text{mit } A = (f_x(z_0) - i f_y(z_0))/2$$

und daher gilt für den *komplexen Zuwachs* $dz = \ell$

$$f(z_0 + \ell) - f(z_0) = A\ell + \Phi(\ell)$$

mit

$$\lim_{\ell \to 0} \frac{\Phi(\ell)}{\ell} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{\ell \to 0} \frac{f(z_0 + \ell) - f(z_0)}{\ell} = A.$$

Definition: *Der Grenzwert*

$$\lim_{\ell \to 0} \frac{f(z_0 + \ell) - f(z_0)}{\ell}$$

heißt die Ableitung *von* f *in* z_0*, kurz*

$$f'(z_0), \quad \frac{df}{dz}(z_0), \quad Df(z_0)$$

□

Komplexe Differenzierbarkeit und Ableitungen.

Bemerkungen:

- Wir bilden Ableitungen einer komplexen Funktion wie im Reellen, nämlich unter Verwendung von Differenzenquotienten.
- Im Reellen lässt sich die Ableitung geometrisch als Tangentensteigung interpretieren. Wie verhält sich dies im Komplexen? (Antwort später!)
- Aus der komplexen Differenzierbarkeit folgt die Existenz einer Ableitung.
- Umgekehrt: Aus der Existenz einer Ableitung folgt die Differenzierbarkeit.

Denn: Aus der Existenz der Ableitung in $z_0 = x_0 + iy_0$ folgt insbesondere

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(z_0) \\ f'(z_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{ih} = \frac{1}{i} f_y(z_0) \end{aligned}$$

und somit $(B = 0)$

$$f_x(z_0) = -i f_y(z_0)$$

Zusammenfassung der bisherigen Diskussion.

Satz: *Sei* $f = u + iv$ *eine komplexe Funktion mit Definitionsbreich* $D(f)$*. Weiterhin sei* $z_0 \in D(f)$*, so dass* u*,* v *in einer Umgebung von* z_0 *stetig partiell nach* x*,* y *differenzierbar sind. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(a) f *ist komplex differenzierbar in* z*;*

(b) u *und* v *genügen den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen;*

(c) Die Ableitung von f *existiert in* z_0*.*

□

Bemerkung: Weiterhin folgt (aus der bisherigen Diskussion) die Beziehung

$$df = f'(z_0)dz$$

falls f in z_0 komplex differenzierbar. Schließlich gilt

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0).$$

□

Beispiel.

Für $f(z) = z^2$ gilt

$$f(x,y) = f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

und somit

$$f_x(x,y) = 2x + 2iy \qquad \text{und} \qquad f_y(x,y) = -2y + 2ix = if_x(x,y)$$

Für jedes $z = z_0$ gilt $B = 0$ und $A = 2z_0$, d.h.

$$df = 2z_0 dz.$$

Somit ist $f(z)$ in z_0 komplex differenzierbar, und es gilt

$$f'(z_0) = 2z_0 \qquad \text{für } z_0 \in \mathbb{C}.$$

Etwas direkter:

$$\frac{f(z_0+\ell) - f(z_0)}{\ell} = \frac{(z_0+\ell)^2 - z_0^2}{\ell} = \frac{2z_0\ell + \ell^2}{\ell} = 2z_0 + \ell \longrightarrow 2z_0 \text{ für } \ell \to 0.$$

□

Beispiel.

Für $f(z) = \bar{z}$ gilt

$$f(x,y) = f(z) = \bar{z} = x - iy$$

und somit

$$f_x(x,y) = 1 \qquad \text{und} \qquad f_y(x,y) = -i.$$

Für jedes $z = z_0$ gilt

$$A = \frac{1}{2}(f_x(x,y) - if_y(x,y)) = 0 \text{ und } B = \frac{1}{2}(f_x(x,y) + if_y(x,y)) = \frac{1-i^2}{2} = 1,$$

also $A \equiv 0$, $B \neq 0$ und $df = \overline{dz}$.

Fazit: Die Funktion $f(z) = \bar{z}$ ist in keinem Punkt der komplexen Ebene komplex differenzierbar, die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind nirgends erfüllt, und die Ableitung von f existiert in keinem Punkt. $\square$

Beispiel.

Für $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$ gilt

$$f(x,y) = |z|^2 = x^2 + y^2, \quad f_x(x,y) = 2x \quad f_y(x,y) = 2y$$

und somit für $z_0 \in \mathbb{C}$

$$A = \frac{1}{2}(f_x(z_0) - i f_y(z_0)) = \overline{z_0}$$

und

$$B = \frac{1}{2}(f_x(z_0) + i f_y(z_0)) = z_0$$

und somit

$$df = \overline{z_0}dz + z_0 d\bar{z}.$$

Fazit: Die Funktion $f(z) = |z|^2$ ist nur im Nullpunkt $z_0 = 0$ komplex differenzierbar, die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind nur im Nullpunkt erfüllt, und die Ableitung von f existiert nur im Nullpunkt mit $f'(0) = 0$. $\square$

Beispiel.

Für $f(z) = \exp(z)$ gilt mit $f = u + iv$ die Zerlegung

$$f(x, y) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)),$$

somit

$$u(x, y) = e^x \cos(y) \qquad \text{und} \qquad v(x, y) = e^x \sin(y)$$

und weiterhin

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= e^x \cos(y) = v_y(x, y) \\ u_y(x, y) &= -e^x \sin(y) = -v_x(x, y). \end{aligned}$$

Somit sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in jedem Punkt der komplexen Ebene erfüllt, d.h. die Funktion $f(z) = \exp(z)$ ist überall komplex differenzierbar. Für die Ableitung gilt

$$f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = e^z = f(z).$$

□

4.2 Analytische Funktionen

Nun: Lassen als Definitionsbereiche nur Gebiete zu.

Definition: *Ein* `Gebiet` *ist eine zusammenhängende offene Punktmenge der komplexen Ebene.* □

Beispiele: Die folgenden Punktmengen komplexer Zahlen sind Gebiete.

- die komplexe Ebene $\mathbb{C}$;
- die aufgeschnittene komplexe Ebene $\mathbb{C}^-$;
- die komplexe Ebene ohne die Punkte $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = i$;
- die offene Einheitskreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$;
- ein Kreisring ohne Rand, z.B. $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 3 < |z| < 7\}$.

Aber:

Eine Kreisscheibe mit Rand ist kein Gebiet, eine solche Menge ist nicht offen. □

Analytische (Holomorphe) Funktionen.

Definition: *Eine komplexe Funktion* $f(z)$, $z \in D(f)$, *heißt* `analytisch` *(bzw.* `holomorph`*), falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.*

- $D(f)$ *ist ein Gebiet;*
- f *ist in jedem Punkt* $z \in D(f)$ *komplex differenzierbar.*

$\square$

Bemerkung: Die obige zweite Bedingung ist jeweils äquivalent zu den beiden folgenden Bedingungen.

- Real- und Imaginärteil von f genügen in jedem Punkt $z \in D(f)$ den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen;
- die Funktion f besitzt in jedem Punkt $z \in D(f)$ eine Ableitung.

Bemerkung: Eine analytische Funktion ist in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig. $\square$

Differentiationsregeln für analytische Funktionen.

Satz: *Die Funktionen* f *und* g *seien analytisch in einem Gebiet* G*. Dann sind die Funktionen* $f+g$ *und* fg *ebenfalls analytisch in* G*. Gilt* $g(z) \neq 0$ *für alle* $z \in G$*, so ist weiterhin* f/g *analytisch in* G*. Es gelten die folgenden Differentiationsregeln.*

$$\begin{aligned} (f+g)' &= f' + g' \\ (fg)' &= f'g + fg' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \end{aligned}$$

□

Ganze Funktionen.

Definition: *Eine Funktion, die in der komplexen Ebene analytisch ist, heißt* `ganze Funktion` □

Bemerkung: Jedes komplexe Polynom

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n \qquad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$$

ist eine ganze Funktion.

Denn: Konstanten $f_c(z) \equiv c \in \mathbb{C}$ sind ganz mit $f_c'(z) \equiv 0$. Weiterhin ist die Identität $g(z) = z$ ganz mit $g'(z) = 1$. Da sich jedes Polynom $p(z)$ als Komposition von Funktionen f_c und g schreiben lässt, ist $p(z)$ ganz mit

$$p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \ldots + n a_n z^{n-1}.$$

□

Bemerkung: Die komplexe Exponentialfunktion $f(z) = \exp(z)$ ist ganz. □

Zusammensetzung analytischer Funktionen.

Betrachte analytische Funktionen

$$g : D(g) \to W(g) \qquad \text{und} \qquad f : D(f)\ \text{to} W(f)$$

mit $W(g) \subset D(f)$.

Satz: *Die Komposition* $f \circ g$ *zweier analytischer Funktionen* f *und* g *mit* $W(g) \subset D(f)$ *ist analytisch, und es gilt die* Kettenregel

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$$

bzw.

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0) \qquad \textit{für alle } z_0 \in D(f \circ g) = W(g).$$

$\square$

Umkehrung analytischer Funktionen.

Betrachte bijektive analytische Funktion

$$f : D(f) \to W(f)$$

mit Umkehrfunktion

$$f^{-1} : W(f) \to D(f).$$

Satz: *Die Umkehrfunktion f^{-1} einer bijektiven analytischen Funktion f ist analytisch, und es gilt*

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

bzw.

$$\left(f^{-1}\right)'(w_0) = \frac{1}{f'(f^{-1})(w_0)} \qquad \text{für alle } w_0 \in D(f^{-1}) = W(f).$$

□

Beispiele.

Beispiel 1: Betrachte $f(z) = z^2$ auf der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Dort ist f injektiv mit Wertebereich $\mathbb{C}^-$. Die Umkehrfunktion $f^{-1}(z) = \sqrt{z}$ ist der Hauptwert der Wurzelfunktion, und es gilt

$$(\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^-.$$

Beispiel 2: Betrachte $f(z) = \exp(z)$ auf dem Streifen $S = \{z \in \mathbb{C} \,|\, -\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi\}$. Dort ist f injektiv mit Wertebereich $\mathbb{C}^-$. Die Umkehrfunktion $f^{-1}(z) = \mathrm{Log}(z)$ ist der Hauptwert des Logarithmus, und es gilt

$$(\mathrm{Log} z)' = \frac{1}{e^{\mathrm{Log}(z)}} = \frac{1}{z} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^-.$$

Beispiel 3: Für $f(z) = z^a$, den Hauptwert von $\{z^a\}$, $z \in \mathbb{C}^-$ und $a \in \mathbb{C}$ fest, gilt

$$(z^a)' = az^{a-1} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^-.$$

□

4.3 Geometrie der komplexen Differenzierbarkeit

Sei $f : D(f) \to W(f)$ eine analytische Funktion und $z_0 \in D(f)$ ein Punkt. Weiterhin sei

$$\Gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t) \,|\, t \in [\alpha, \beta]\} \subset D(f)$$

eine Kurve, die z_0 enthält, d.h. $z_0 = \Gamma(t_0)$ für ein $t_0 \in [\alpha, \beta]$.

Schließlich seien $x(t)$ und $y(t)$ in t_0 differenzierbar. Dann ist $z(t)$ in t_0 differenzierbar mit Ableitung

$$z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0).$$

Im folgenden setzen wir $z'(t_0) \neq 0$ voraus.

Frage: Wie verhält sich die Kurve Γ unter der Abbildung f?

Betrachte dazu das Bild

$$\Gamma^* = \{w(t) = f(z(t)) \,|\, t \in [\alpha, \beta]\}$$

mit $w_0(t_0) = f(z(t_0))$, kurz $w_0 = f(z_0)$.

Geometrische Interpretationen.

Beachte: Der Tangentenvektor $w'(t_0)$ von Γ^* in w_0 berechnet sich nach der Kettenregel zu

$$w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0).$$

Für $f'(z_0) \neq 0$ gilt dann

$$\arg(w'(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(z'(t_0)).$$

bzw.

$$\alpha^* = \alpha + \omega$$

für $\alpha^* = \arg(w'(t_0))$, $\alpha = \arg(z'(t_0))$ und $\omega = \arg(f'(z_0))$.

Geometrische Interpretationen:

- Man erhält den Tangentenvektor von Γ^* durch Drehung von Γ um Winkel ω;
- Der Drehwinkel ω hängt von f und z_0 ab, aber nicht von Γ;
- Der Tangentenvektor *jeder* Kurve durch z_0 wird durch die Abbildung f um den Winkel $\omega = \arg(f'(z_0))$ gedreht. $\square$

Winkeltreue (Konforme) Abbildungen.

Definition: *Eine Abbildung* $f : D(f) \to W(f)$, *unter der alle Winkel (inklusive deren Orientierung) erhalten bleiben, nennt man* `winkeltreu` *bzw.* `konform`. □

Satz: *Eine analytische Funktion* $f : D(f) \to W(f)$ *ist in jedem Punkt* $z_0 \in D(f)$ *mit* $f'(z_0) \neq 0$ *konform.* □

Weiterhin gilt die folgende Umkehrung des Satzes.

Satz: *Sei* $f : D(f) \to W(f)$ *in* $z_0 \in D(f)$ *konform. Weiterhin seien Real- und Imaginärteil* $u(z)$ *und* $v(z)$ *von* $f = u + iv$ *in einer Umgebung von* z_0 *stetig differenzierbar. Dann ist* f *komplex differenzierbar mit* $f'(z_0) \neq 0$. □