5 Ebene Potentialprobleme

Ziel: Lösung ebener Potentialprobleme mit konformen Abbildungen.

5.1 Konforme Transformation von Potentialen

Ausgangssituation:

- Sei $f : G \to G'$ analytisch und bijektiv, für Gebiete $G, G' \subset \mathbb{C}$.
- Somit gibt es eine Umkehrabbildung $f^{-1} : G' \to G$ mit

$$z = f^{-1}(w) \quad \text{für } w = f(z) \qquad \text{wobei } z = x + iy \in G, w = u + iv \in G'.$$

- Weiterhin sei in G eine *reellwertige* zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$\Phi : (x, y) \to \Phi(x, y) = \Phi(z) \in \mathbb{R} \qquad \text{für } z \in G$$

definiert.

Konforme Transformationen.

Dann gibt es eine Abbildung

$$\Psi := \Phi(f^{-1}) : G' \to \mathbb{R}$$

bzw.

$$\Psi : (u, v) \to \Psi(u, v) = \Psi(w) := \Phi(f^{-1}(w)) \in \mathbb{R} \qquad \text{für } w \in G'$$

Definition: *Die obige Konstruktion von* Ψ *nennt man* `konforme Transformation` *von* Φ *mit der Abbildung* f. □

Physikalische Anwendungen: Im folgenden sind Φ und Ψ `Potentiale`, z.B.

- elektrostatische Potentiale;
- Strömungspotentiale;
- Temperaturfelder etc.

Dabei sind die Vektoren (Φ_x, Φ_y) und (Ψ_u, Ψ_v) von besonderem Interesse.

Komplexe Gradienten.

Definition: *Unter dem* komplexen Gradienten grad(Φ) *von* Φ *verstehen wir die Funktion*

$$\text{grad}((\Phi)(x,y)) = \Phi_x(x,y) + i\Phi_y(x,y)$$

□

Bemerkungen:

- Der komplexe Gradient fasst den *üblichen* Gradienten als komplexe Zahl auf.
- Entsprechend ist der komplexe Gradient grad(Ψ) von Ψ gegeben durch

$$\text{grad}((\Psi)(u,v)) = \Psi_u(u,v) + i\Psi_v(u,v).$$

Frage:

Wie verhalten sich komplexe Gradienten bei konformen Transformationen?

Transformationen von komplexen Gradienten.

Ausgangspunkt: Sei $\Phi(x,y) = \Psi(u(x,y), v(x,y))$ mit

$$u(x,y) = u(z) \qquad v(x,y) = v(z) \qquad u(z) + iv(z) = f(z).$$

Dann gilt (nach Kettenregel)

$$\begin{aligned}
\Phi_x &= \Psi_u(u(x,y), v(x,y))u_x(x,y) + \Psi_v(u(x,y), v(x,y))v_x(x,y) \\
\Phi_y &= \Psi_u(u(x,y), v(x,y))u_y(x,y) + \Psi_v(u(x,y), v(x,y))v_y(x,y)
\end{aligned}$$

und somit

$$\text{grad}(\Phi) = \Phi_x + i\Phi_y = \Psi_u(u_x + iu_y) + \Psi_v(v_x + iv_y),$$

bzw. mit Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ gilt

$$\text{grad}(\Phi) = (\Psi_u + i\Psi_v)(u_x - iv_x) = \text{grad}(\Psi) \cdot (u_x - iv_x).$$

Erinnerung: Es gilt

$$f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) \qquad \text{und} \qquad \overline{f'(z)} = u_x(z) - iv_x(z).$$

Erster Transformationssatz.

Satz: *Geht* Ψ *durch Transformation mit der analytischen Abbildung* f *aus* Φ *hervor, so gilt*

$$\operatorname{grad}(\Phi)(z) = \operatorname{grad}(\Psi)(w) \cdot \overline{f'(z)}$$

wobei $w = f(z)$. ■

Bemerkung: Bei vielen Potentialproblemen ist die Größe

$$\Delta\Phi = \Delta_z\Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy}$$

bekannt.

Frage: Wie verhält sich die Transformation Ψ unter dem Laplace-Operator Δ? D.h. welcher Werte ergibt sich für

$$\Delta\Psi = \Delta_w\Psi = \Psi_{uu} + \Psi_{vv} \quad ?$$

Anwendung des Laplace-Operators.

Mit erneuter Anwendung der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned}
\Phi_{xx} &= \Psi_{uu}(u_x)^2 + 2\Psi_{uv}u_x v_x + \Psi_{vv}(v_x)^2 + \Psi_u u_{xx} + \Psi_v v_{xx} \\
\Phi_{yy} &= \Psi_{uu}(u_y)^2 + 2\Psi_{uv}u_y v_y + \Psi_{vv}(v_y)^2 + \Psi_u u_{yy} + \Psi_v v_{yy}.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt durch Addition

$$\begin{aligned}
\Delta_z \Phi &= \Psi_{uu}\left[(u_x)^2 + (u_y)^2\right] + 2\Psi_{uv}\left[u_x v_x + u_y v_y\right] \\
&\quad + \Psi_{vv}\left[(v_x)^2 + (v_y)^2\right] + \Psi_u \Delta_z u + \Psi_v \Delta_z v.
\end{aligned}$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, liefern

$$\Delta_z \Phi = (\Psi_{uu} + \Psi_{vv})|f'(z)|^2 + \Psi_u \Delta_z u + \Psi_v \Delta_z v$$

wobei $|f'(z)|^2 = (u_x(z))^2 + (v_x(z))^2$ verwendet wurde.

Zweiter Transformationssatz.

Satz: *Geht* Ψ *aus* Φ *durch konforme Transformation mit der Abbildung* f *hervor, so gilt*

$$\Delta_z \Phi = \Delta_w \Psi \cdot |f'(z)|^2$$

wobei $w = f(z)$.

Beweis: Es gilt

$$\Delta_z \Phi = (\Psi_{uu} + \Psi_{vv})|f'(z)|^2 + \Psi_u \Delta_z u + \Psi_v \Delta_z v,$$

und weiterhin folgt

$$u_{xx} = v_{yx} \qquad \text{und} \qquad u_{yy} = -v_{xy}$$

aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, somit

$$\Delta_z u = u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

und analog gilt $\Delta_z v = 0$. Insgesamt bekommt man somit die Behauptung. ■

Harmonische Funktionen.

Folgerung: *Genügt Ψ der Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$, so folgt $\Delta\Psi = 0$.*

Beweis: Mit der Analytizität von f folgt $f'(z) \neq 0$. Daraus bekommt man die Behauptung direkt mit der Identität $\Delta_z\Phi = \Delta_w\Psi \cdot |f'(z)|^2$. ■

Definition: *Eine Funktion f, die in einem Gebiet G der Laplace-Gleichung $\Delta f = 0$ genügt, nennt man* harmonisch *in G.* □

Somit können wir die obige Folgerung entsprechend umformulieren.

Folgerung: *Bei konformer Transformation gehen harmonische Funktionen in harmonische Funktionen über.* □

Wie bereits mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gezeigt, gilt

Satz: *Falls $f = u + iv$, $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, analytisch auf einem Gebiet G, so gilt*

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{auf } G \qquad \text{und} \qquad \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \text{auf } G$$

d.h. Real- und Imaginärteil von f sind jeweils harmonisch auf G.

Beweis: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y = v_{yx} - v_{xy} = 0$. Analog $\Delta v = 0$. ■

Existenz der konjugiert harmonischen Funktion.

Es gilt die folgende Umkehrung des vorigen Satzes.

Satz: *Ist* $u \equiv u(x,y)$ *auf einem Gebiet* G *harmonisch,* $\Delta u = 0$ *in* G*, so gibt es eine Funktion* $v \equiv v(x,y)$*, so dass die Abbildung* $f = u + iv$ *auf* G *analytisch ist.*

Beweis: Sei $u \equiv u(x,y)$ mit $\Delta u = 0$ in G. Somit suchen wir $v \equiv v(x,y)$ mit

$$v_x = -u_y \qquad \text{und} \qquad v_y = u_x,$$

so dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind, woraus folgen würde

$$\text{grad}(v) = (v_x, v_y) = (-u_y, u_x) = V = (V_1, V_2)$$

Somit suchen wir ein `Potential` v mit $\text{grad}(v) = V$. Mit der `Integrabilitätsbedingung`

$$\text{rot}(V) = \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = u_{yy} + u_{xx} = \Delta u = 0$$

ist die Existenz eines solchen Potentials gesichert (vgl. Analysis III). ■

Skizze zur Lösung ebener Potentialprobleme.

Hilfsmittel: Transformationssätze.

Vorgehensweise: Konforme Transformation.

- **Gegeben:**

Potentialproblem in der z-Ebene, der *physikalischen Ebene*.

- **Transformation:**

Transformiere das Problem konform in die w-Ebene, die *Modellebene*.

- **Vereinfachung:**

Löse das Problem (*leicht*?) in der Modellebene.

- **Lösung:**

Rücktransformation in z-Ebene liefert Lösung in der physikalischen Ebene. $\square$

Temperaturverteilung in homogenem Zylinder.

Gegeben:

ein homogener Zylinder senkrecht zur z-Ebene mit beliebigem Querschnitt Q.

- Die Oberflächentemperatur des Zylinders sei *zeitunabhängig*.
- Die Oberflächentemperatur sei *konstant* bei konstantem z.

Frage: Wie sieht die Temperaturverteilung im Inneren des Zylinders aus?

- dabei werde am Rand die Temperatur $\Phi_0(z)$, $z \in \Gamma$, gemessen.

Modellierung: Die Temperatur Φ genügt nach der Wärmeleitungsgleichung der Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi = 0 \qquad \text{in } G.$$

Zusätzlich gelten die `Dirichlet-Randbedingungen`

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) \qquad \text{für alle } z \in \Gamma.$$

Mathematische Aufgabenstellung: Löse das obige `Dirichlet-Problem`.

Annahme: Das Problem `gut gestellt`, d.h. es gibt eine eindeutige Lösung. □

Vereinfachung des Dirichlet-Problems.

- **Ziel:** Bilde das Gebiet G eineindeutig und konform auf den Einheitskreis ab.
- **Bemerkung:** Unter geeigneten Bedingungen ist dies mit einer analytischen Funktion f möglich, so dass

$$\Psi(w) = \Phi(f^{-1}(w)) \qquad \text{für } |w| \leq 1$$

die *transformierte* Temperatur liefert.

- Im Inneren des Einheitskreises erfüllt Ψ somit die Laplace-Gleichung

$$\Delta\Psi = 0 \qquad \text{für } |w| < 1.$$

- Weiterhin nimmt Ψ auf dem Kreisrand die transformierten Randwerte an:

$$\Psi(e^{i\theta}) = \Psi_0(e^{i\theta}) = \Psi_0(f^{-1}(e^{i\theta})) \qquad \text{für } 0 \leq \theta < 2\pi.$$

- **Einfachere Aufgabe:** Löse das Dirichlet-Problem für Ψ auf dem Einheitskreis.

Lösung des einfacheren Dirichlet-Problems.

- **Voraussetzung:** Sei Φ_0 hinreichend *glatt*, und durch

$$\Psi_0(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$$

in eine komplexe Fourier-Reihe entwickelt, mit den Fourier-Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_0(e^{i\theta}) e^{-in\theta} \, d\theta.$$

- Dann kann die Lösung des Dirichlet-Problems direkt angegeben werden mit

$$\Psi(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \rho^{|n|} e^{in\theta} \qquad \text{für } w = \rho e^{i\theta} \text{ mit } 0 \le \rho \le 1.$$

- **Rücktransformation:** Die Lösung des ursprünglichen Problems ist somit

$$\Phi(z) = \Psi(f(z)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n |f(z)|^{|n|} e^{in\phi} \qquad \text{mit } \phi = \arg(f(z)). \qquad \square$$

5.2 Ebene stationäre Strömungen von Flüssigkeiten

Betrachten:

- zeitunabhängige ebene Strömungen von
- *idealen* (d.h. reibungsfeien) und *inkompressiblen* Flüssigkeiten;
- die Strömungen seien *quellenfrei* und *wirbelfrei*;
- dabei bezeichne

$$\mathbf{q}(x, y) = (q_1(x, y), q_2(x, y))$$

  den Geschwindigkeitsvektor der Strömungen im Punkt (x, y).

- Quellenfreiheit bedeutet

$$\operatorname{div}(\mathbf{q}) = \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} = 0.$$

- Wirbelfreiheit bedeutet

$$\operatorname{rot}(\mathbf{q}) = \frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} = 0.$$

Zur Existenz von Potentialströmungen.

Analysis III: Mit der Wirbelfreiheit $\operatorname{rot}(\mathbf{q}) = 0$ ist das Differential

$$q_1(x, y)dx + q_2(x, y)dy$$

integrabel, d.h. es gibt eine Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{q} = \operatorname{grad}(\Phi)$$

bzw.

$$q_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad q_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Definition: *Die Funktion Φ mit $\mathbf{q} = \operatorname{grad}(\Phi)$ heißt* Potentialströmung *bzw. das* Geschwindigkeitspotential *der Strömung.* □

Erinnerung: *Eine Potentialströmung ist stets wirbelfrei, denn $\operatorname{rot}(\mathbf{q}) = 0$ folgt unmittelbar aus $\mathbf{q} = \operatorname{grad}(\Phi)$.* □

Zur Quellenfreiheit von wirbelfreien Potentialen.

Beobachtung: Verwendet man die Bedingung (an die Wirbelfreiheit von $\mathbf{q}$)

$$q_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad q_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

so gilt für die Quellenfreiheit, $\operatorname{div}(\mathbf{q}) = 0$, die Bedingung

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

Zusammenfassung: Das Geschwindigkeitspotential Φ einer quellen- und wirbelfreien Strömung einer idealen kompressiblen Flüssigkeit ist harmonisch, d.h. es gilt

$$\Delta \Phi = 0.$$

Umkehrung: Jede harmonische Funktion Φ, $\Delta \Phi = 0$, lässt sich als Geschwindigkeitspotential einer quellen- und wirbelfreien Strömung interpretieren. □

Neumannsches Randwertproblem.

Voraussetzungen:

- Sei Γ der Rand des durchströmten Gebiets G (begrenzende Wand);
- die Strömung verläuft dann tangential zum Rand Γ, d.h.
- der Geschwindigkeitsvektor $\mathrm{grad}(\Phi)$ ist der Tangentenvektor von Γ;
- dann verschwindet die Normalenableitung von Φ längs Γ.
- Dies führt insgesamt zu dem Neumannschen Randwertproblem

$$
\begin{aligned}
\Delta(\Phi) &= 0 \\
\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} &= 0
\end{aligned}
$$

das mit der Methode der konformen Transformation gelöst werden kann.

- Im folgenden entwickeln wir diesen Lösungsweg.

Lösung des Neumannschen Randwertproblems.

- Bilde G bijektiv und konform mit $f : G \to G^*$ auf *einfacheres* Gebiet G^* ab;
- Transformiere das Potential Φ von G nach G^*, womit

$$\Psi(w) = \Phi(f^{-1}(w)) \qquad \text{für alle } w \in G^*.$$

- Nach dem zweiten Transformationssatz ist Ψ harmonisch, d.h. es gilt

$$\Delta\Psi = 0$$

- Falls f sogar auf dem Rand Γ von G konform ist, so gilt

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n^*} = 0$$

  für die Normalenableitung des Randes Γ^* von G^*.
- Löse nun das *einfachere* Neumannsche Randwertproblem

$$\Delta\Psi = 0 \text{ in } G^* \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial n^*} = 0 \text{ auf } \Gamma^*$$

- Die Lösung in G bekommt man durch Rücktransformation. $\square$

Strömung durch einen Kanal variabler Breite.

- **Physikalische Ebene:** ein Kanal G variabler Breite;
- **Modellebene:** ein gerader Kanal G^*;
- Wirbelfreie Strömungen im geraden Kanal sind homogen mit Potential

$$\Psi(w) = V\mathrm{Re}(w)$$

  wobei V der Betrag des (konstanten) Geschwindigkeitsvektors ist, der die Geschwindigkeit liefert.
- **Aufgabe:**
  Bilde physikalischen Kanal inklusive Rand konform auf den geraden Kanal ab.
- Löse die Neumannsche Randwertaufgabe im geraden Kanal;
- Erhalte die Lösung im physikalischen Kanal durch Rücktransformation. $\square$

Umströmung eines Hindernisses.

Voraussetzungen für die physikalische Ebene:

- homogene Strömung mit Geschwindigkeit V in Richtung der reellen Achse;
- umströmt werde ein zylindrisches Hindernis mit beschränktem Querschnitt;

Frage:

- Wie sieht das Strömungsbild der gestörten Strömung aus?

Beachte:

- die Strömung bleibt im Unendlichen ungestört und somit gilt

$$\mathrm{grad}(\Phi(z)) \to V \qquad \text{für } z \to \infty$$

für den Geschwindigkeitsvektor, kurz $\mathrm{grad}(\Phi(\infty)) = V$.

Umströmung eines Hindernisses.

Vereinfachte Modellebene:

- Ist das Hindernis eine unendlich dünne Platte parallel zur reellen Achse, so wird die Strömung nicht gestört.
- in diesem Fall ist das Potential gegeben durch $\Psi(w) = V\mathrm{Re}(w)$.
- **Problem:** Bilde das in der physikalischen Ebene durchströmte Gebiet auf aufgeschnittene Ebene $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ ab mit analytischer Funktion f, wobei

$$f(\infty) = \infty \qquad \text{und} \qquad f'(\infty) = 1.$$

- Dann gilt mit dem ersten Transformationssatz

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}(\Phi(z)) &= \mathrm{grad}(\Psi(w)) \cdot \overline{f'(z)} \\ \mathrm{grad}(\Phi(\infty)) &= \mathrm{grad}(\Psi(\infty)) \qquad \text{für } z \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

so dass wir in der physikalischen Ebene und in der Modellebene dieselbe homogene Strömung im Unendlichen bekommen. □

Umströmung des Einheitskreiszylinders.

- Betrachte die Strömung um den Einheitskreiszylinder;
- Mit der gestreckten Joukowski-Funktion

$$f(z) = z + \frac{1}{z} \qquad \text{für } |z| > 1$$

geht das Äußere des Einheitskreises über in die aufgeschnittene Ebene

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0 \text{ und } \mathrm{Re}(z) \in [-2, 2]\}$$

- dabei gilt $f(\infty) = \infty$ und $f'(\infty) = 1$.
- für das Potential in der physikalischen Ebene bekommt man somit

$$\Phi(z) = \Psi(f(z)) = V \mathrm{Re} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

bzw.

$$\Phi(x, y) = V \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Umströmung des Einheitskreiszylinders.

- Mit $\text{grad}(\Psi(w)) \equiv V$ und $f'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$ erhalten wir

$$q(z) = \text{grad}(\Phi(z)) = \text{grad}(\Psi(f(z))) \cdot \overline{f'(z)} = V\left(1 - \frac{1}{\overline{z}^2}\right)$$

für den Geschwindigkeitsvektor bzw. in Polarkoordinaten

$$q(re^{i\phi}) = V\left(1 - \frac{1}{r^2}e^{2i\phi}\right)$$

- Speziell an der Zylinderoberfläche bekommen wir das Geschwindigkeitsfeld

$$q(e^{i\phi}) = V(1 - e^{2i\phi})$$

mit Geschwindigkeit

$$|q(e^{i\phi})| = V|1 - e^{2i\phi}| = 2V|\sin(\phi)|$$

- Für $\phi = 0$ und $\phi = \pi$ ist die Geschwindigkeit Null (Staupunkte);
- Für $\phi = \pm\pi/2$ ist die Geschwindigkeit maximal, nämlich $2V$. □