6.5 Die Taylor-Reihe

Start: Erinnerung an den Satz über die geometrische Reihe.

- Für die *endliche* geometrische Reihe gilt die Summenformel

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} \qquad \text{für } q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

- Für $|q| < 1$ ist die *unendliche* geometrische Reihe konvergent mit Grenzwert

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \text{für } |q| < 1,$$

während die Reihe für $|q| \geq 1$ divergiert.

Zur Herleitung der Taylor-Reihe.

Vorbereitungen:

- Sei f analytisch im Gebiet G, $\Gamma \subset G$ einfach geschlossen und positiv orientiert.
- Dann gilt die Cauchysche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

  für jedes $z \in G$, das von Γ umlaufen wird.
- Sei nun $a \in G$ ein Punkt, der von Γ umlaufen wird.
- Weiterhin bezeichne r den Abstand zwischen a und Γ, d.h.

$$r = \min_{\zeta \in \Gamma} |\zeta - a|$$

- Schließlich sei z ein Punkt im offenen Kreis $B_r(a) = \{w \in \mathbb{C} : |w - a| < r\}$ um den Punkt a mit Radius r, d.h. $z \in B_r(a)$. Insbesondere gilt

$$|z - a| < r.$$

Zur weiteren Herleitung der Taylor-Reihe.

- Es gilt die Zerlegung

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a + a - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}}$$

- Wegen $|z-a| < r$ und $|\zeta - a| \geq r$ für $\zeta \in \Gamma$ gilt $|q| < 1$ für

$$q := \frac{z-a}{\zeta-a}.$$

- Daraus folgt die Darstellung

$$\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n \qquad \text{für } \zeta \in \Gamma$$

und weiterhin

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n d\zeta \qquad \text{für } z \in B_r(a).$$

Zur weiteren Herleitung der Taylor-Reihe.

- Durch Vertauschen von Summation und Integration bekommen wir somit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \, d\zeta \qquad \text{für } z \in B_r(a).$$

- Wegen

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \, d\zeta$$

gilt insgesamt die Taylor-Reihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \qquad \text{für } z \in B_r(a).$$

d.h. wir bekommen die Taylor-Reihe von f um den Entwicklungspunkt a

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots$$

$\square$

Bemerkungen zur Taylor-Reihe.

- Mit
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad \text{für } z \in B_r(a).$$
konvergiert die Taylor-Reihe in $B_r(a)$ und stellt dort f dar.
- Die Taylor-Reihe hängt nur von f und a, aber nicht von Γ ab.
- Daher hängt der Konvergenzbereich der Taylor-Reihe nur von f und a ab.

Satz: *Die Funktion f sei analytisch im Gebiet G und a sei ein Punkt in G. Dann konvergiert die Taylor-Reihe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,$$

gegen $f(z)$ für alle z innerhalb des größten Kreises um a, dessen Inneres ganz in G enthalten ist, d.h. für alle $z \in B_r(a) \subset G$. □

Die Taylor-Reihe ist eindeutig.

Satz: *Die Funktion* f *sei analytisch im Gebiet* G *und* a *sei ein Punkt in* G. *In einer Umgebung von* a *gelte für* $f(z)$ *die Darstellung*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

mit komplexen Konstanten $c_n \in \mathbb{C}$, *für* $n = 0, 1, 2, \ldots$. *Dann gilt*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots$$

d.h. die obige Reihe ist die Taylor-Reihe von f *um* a.

Beweis: Für $z = a$ gilt $f(a) = c_0$. Durch Differentiation von f erhält man

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1} \text{ bzw. } f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1) c_n (z-a)^{n-k}$$

und somit $f'(a) = c_1$ bzw. $f^{(n)}(a) = n! c_n$ für $z = a$, d.h. die Koeffizienten c_n stimmen mit den Koeffizienten der Taylor-Reihe überein. ■

Ein Beispiel.

Für die Exponentialfunktion gilt

$$\frac{d^n}{dz^n}\exp(z) = \exp(z) \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

und somit gilt

$$\left.\frac{d^n}{dz^n}\exp(z)\right|_{z=0} = 1 \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Daher besitzt die Taylor-Reihe von $\exp(z)$ um $a = 0$ die Gestalt

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

- Die Exponentialfunktion ist in der ganzen komplexen Zahlenebene analytisch.
- Somit gilt die obige Darstellung für die Taylor-Reihe von $\exp(z)$ in ganz $\mathbb{C}$.

$\square$

Noch zwei Beispiele.

- Für die Taylor-Reihe von $\exp(-z^2)$ um Null bekommen wir die Darstellung

$$\exp(-z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^n}{n!} = 1 - \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} - \frac{z^6}{3!} \pm \ldots$$

  in ganz $\mathbb{C}$.

- Die komplexe Sinusfunktion $\sin(z)$ besitzt die bekannte Reihen-Darstellung

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \ldots$$

- Der komplexe Sinus ist auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch.
- Die obige Reihe ist die Taylor-Reihe von $\sin(z)$ um Null.
- Die Taylor-Reihe konvergiert auf ganz $\mathbb{C}$.

$\square$

Und noch ein Beispiel.

- Wir entwickeln die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

um Null. Für $|z| < 1$ gilt die Darstellung

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-z^2\right)^n = 1 - z^2 + z^4 - z^6 \pm \ldots$$

- Dies ist bereits die Taylor-Reihe von $f(z)$ um Null.
- Die Taylor-Reihe konvergiert im Einheitskreis, d.h. für $|z| < 1$.
- **Begründung:** Die Funktion $f(z)$ ist analytisch in $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, und der größte Kreis um Null, in dem f analytisch ist, ist der Einheitskreis. $\square$

Die Cauchysche Koeffizientenabschätzungsformel.

Satz: *Die Funktion* f *sei analytisch im Gebiet* G*. Die abgeschlossene Kreisscheibe* $|z-a| \leq r$, $r > 0$, *sei in* G *enthalten, und es sei*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$$

die Taylor-Reihe von f *um* a, *also*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Weiterhin sei

$$M(r) = \max_{|z-a|=r} |f(z)|.$$

Dann gilt die Cauchysche Koeffizientenabschätzungsformel

$$|c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Interpretation: Die Werte $f^{(n)}(a)$ können nicht beliebig schnell anwachsen.

Beweis: Nach der Cauchyschen Integralformel gilt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz.$$

Somit ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned} |c_n| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\max_{|z-a|=r} \frac{|f(z)|}{|z-a|^{n+1}} \right) 2\pi r \\ &= \frac{M(r)}{r^n} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$

■

Der Satz von Liouville.

Satz (Satz von Liouville)**:** *Ist eine komplexe Funktion f in der ganzen komplexen Ebene analytisch und beschränkt, so ist f konstant auf ganz $\mathbb{C}$.*

Beweis: Sei f analytisch auf ganz $\mathbb{C}$ und beschränkt, d.h. es gibt ein M mit

$$|f(z)| \le M \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt für $a \in \mathbb{C}$ mit der Cauchyschen Koeffizientenabschätzungsformel

$$|f'(a)| \le \frac{M}{r}$$

für beliebiges $r > 0$. Für $r \to \infty$ folgt daraus

$$f'(a) = 0.$$

Da a beliebig war, gilt $f' \equiv 0$ auf ganz $\mathbb{C}$, d.h. f ist konstant auf ganz $\mathbb{C}$. ∎

6.6 Die Laurent-Reihe

- **Voraussetzung:** Sei f analytisch in zweifach zusammenhängendem Gebiet G.
- **Ziel:** Stelle f in G durch geeignete Reihen-Entwicklung dar.
- **Vereinfachung:**

Für $a \in \mathbb{C}$ und $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ sei f analytisch im Kreisring

$$R \equiv R_{r_1}^{r_2}(a) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z-a| < r_2\} = B_{r_2}(a) \setminus \overline{B_{r_1}(a)}$$

wobei $B_r(a)$ der offene, $\overline{B_r(a)}$ der abgeschlossene Kreis um a mit Radius $r > 0$.

- Falls $r_1 = 0$, so gilt $R_0^{r_2}(a) = B_{r_2}(a) \setminus \{a\}$;
- Falls $r_2 = \infty$, so gilt $R_{r_1}^{\infty}(a) = C \setminus \overline{B_{r_1}(a)}$.

Beachte:

- f kann nicht nach ganzen positiven Potenzen von $z-a$ in R entwickelt werden.
- Denn ansonsten wäre f analytisch in ganz $B_{r_2}(a)$.

Die Laurent-Reihenentwicklung.

Satz: *Die Funktion f sei analytisch im Kreisring $R \equiv R_{r_1}^{r_2}(a)$, und es sei*

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \qquad \textit{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

wobei $\Gamma \subset R$ eine beliebige Kurve ist, die $B_{r_1}(a)$ einmal im positiven Sinne umläuft. Dann gilt die Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \textit{für alle } z \in R.$$

Definition: *Die obige Reihe heißt* Laurent-Reihe *von f in R.*
Weiterhin heißt a das Entwicklungszentrum *der Laurent-Reihe.* □

Beachte: Die Laurent-Reihe enthält positive und negative Potenzen von $z - a$.

Bemerkungen zu Laurent-Reihenentwicklungen.

- Falls f in ganz $B_{r_2}(a)$ analytisch ist, so gilt

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz = 0 \qquad \text{für } n = -1, -2, -3, \ldots .$$

In diesem Fall enthält die Laurent-Reihe keine negativen Potenzen von $z - a$ und stimmt daher mit der Taylor-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \text{für alle } z \in B_{r_2}(a).$$

überein. Insbesondere gilt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

- Die Werte der Laurent-Koeffizienten c_n sind unabhängig von Γ.

Ein Lemma.

Lemma: *Die Funktion* f *sei analytisch im Kreisring* $R \equiv R_{r_1}^{r_2}(a)$. *Weiterhin sei* $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$. *Dann gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \qquad \textit{für alle } \rho_1 < |z-a| < \rho_2,$$

wobei Γ_1 *der innere und* Γ_2 *der äußere Kreisrand von* $R_{\rho_1}^{\rho_2}$ *ist.*

Beweis: Sei $z \in R_{\rho_1}^{\rho_2}$. Dann gilt (siehe Skizze)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = f(z) \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_4} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = 0.$$

Wegen $\Gamma_3 + \Gamma_4 = \Gamma_2 - \Gamma_1$ folgt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_4} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta. \end{aligned}$$

■

Beweis vom Satz der Laurent-Reihenentwicklung.

Beweis: Sei $z \in R$. Für $\zeta \in \Gamma_2$ gilt $|\zeta - a| > |z - a|$ und somit

$$\left| \frac{z-a}{\zeta - a} \right| < 1 \qquad \text{für } \zeta \in \Gamma_2.$$

Damit bekommen wir

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a + a - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} \, d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} \, d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n c_n. \end{aligned}$$

Fortsetzung des Beweises.

Andererseits gilt $|\zeta - a| < |z - a|$ für $\zeta \in \Gamma_1$ und somit

$$\left|\frac{\zeta - a}{z - a}\right| < 1 \qquad \text{für } \zeta \in \Gamma_1.$$

Damit bekommen wir

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a + a - z} = -\frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - a}{z - a}} = -\frac{1}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - a}{z - a}\right)^n$$

und somit

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^n}{(z-a)^{n+1}} \, d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} f(\zeta)(\zeta - a)^n \, d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^{-n-1} c_{-n-1} = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n. \end{aligned}$$

■

Die Laurent-Reihe ist eindeutig.

Satz (Eindeutigkeitssatz)**:**
Eine in einem Kreisring $R \equiv R_{r_1}^{r_2}(a)$, $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$, *analytische Funktion* f *kann nur auf eine Weise in* R *durch eine Reihe der Form*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

dargestellt werden, nämlich durch ihre Laurent-Reihe, wobei

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \qquad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

mit einem Weg Γ, *der* $\overline{B_{r_1}(a)}$ *einmal im positiven Sinn umläuft.*

Beweis: Angenommen es gibt eine weitere Darstellung der Form

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z-a)^n \qquad \text{für } z \in R.$$

Dann gilt

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z-a)^n \qquad \text{mit } d_n = c_n - c'_n \text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ und $\Gamma \in R$ ein positiv orientierter Kreis um a.

Dann gilt (durch Multiplikation mit $(z-a)^{-m-1}$ und Integration längs Γ)

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \int_\Gamma (z-a)^{n-m-1}\, dz$$

Wegen

$$\int_\Gamma (z-a)^k \, dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } k = -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

folgt daraus $0 = d_m \cdot 2\pi i$ und somit $d_m = 0$, d.h. $c_m = c'_m$.

Da m beliebig war, sind die beiden Reihen identisch. ■

Beispiel.

Bestimme die Laurent-Reihe der Funktion $f(z) = \sin(z)/z^2$ im Kreisring R_0^∞.

Es gilt

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm$$

und daher ist

$$\frac{\sin(z)}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} \pm$$

die Laurent-Reihe von f mit Entwicklungszentrum $a = 0$. □

Noch ein Beispiel. Bestimme die Laurent-Reihe der Funktion

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

um den Entwicklungspunkt $a = 1$.

Es gilt

$$\exp(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \ldots$$

und daher mit $w = 1/(1-z)$,

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{1}{1-z}\right) &= 1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{(1-z)^3} + \ldots \\ &= 1 - \frac{(z-1)^{-1}}{1!} + \frac{(z-1)^{-2}}{2!} - \frac{(z-1)^{-3}}{3!} \pm \ldots\end{aligned}$$

die Laurent-Reihe von f mit Entwicklungszentrum $a = 1$. $\square$

Und noch ein Beispiel. Bestimme die Laurent-Reihe der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}$$

in R_0^1 und in R_1^∞. In R_0^1, d.h. für $|z| < 1$, gilt

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$$

und daher

$$f(z) = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$$

für die Laurent-Reihe von f um $a = 0$ in R_0^1. In R_1^∞, d.h. $|z| > 1$, bekommen wir

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots\right) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \ldots$$

und somit

$$f(z) = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \ldots$$

für die Laurent-Reihe von f um $a = 0$ in R_1^∞. $\square$